دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده مهندسی - گروه کامپیوتر
آزمایشگاه بینایی ماشین

تبدیل موجک

MV Lab
آزمایشگاه بینایی ماشین
گروه مهندسی کامپیوتر
دانشکده مهندسی
دانشگاه فردوسی مشهد
تلفن ۰۵۱۳ ۸۸۰ ۶۱۶۸

نسخه	تهیه کننده	تاریخ	اصلاحات
1.0	بشرا رجایی حمیدرضا پوررضا	زمستان ۸۳	نسخه‌ی اولیه
1.1	حمیدرضا پوررضا	تابستان ۸۵	ویرایش و تصحیح
1.2	حمیدرضا پوررضا	پاییز ۸۶	ویرایش و تصحیح
1.21	حمیدرضا پوررضا	پاییز ۸۶	اصلاح فرمت
1.22	حمیدرضا پوررضا	پاییز ۸۸	اصلاح فرمت

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

۱- مفاهیم پایه

سیگنال غیرایستا[1]، سیگنالی است که مشخصات آن در طول زمان (مکان) تغییر می‌کند. ابزار کلاسیک آنالیز سیگنال، تبدیل فوریه است. این تبدیل در مواجهه با سیگنالهای غیرایستا ضعیف عمل می‌کند. در ادامه با بررسی مشکلات تبدیل فوریه، به معرفی تبدیل موجک[2] که بخوبی نقاط ضعف این تبدیل را پوشش داده می‌پردازیم.

۱–۱– تبدیل فوریه

در قرن ۱۹، ریاضیدان فرانسوی J.Fourier، نشان داد که هر تابع تناوبی می‌تواند بصورت مجموع توابع نمایی مختلط نمایش داده شود. سالها بعد، ایده او به سیگنالهای تناوبی و غیر تناوبی ناپیوسته تعمیم داده شد. در سال ۱۹۶۵، الگوریتم Fast Fourier Transform (FFT) ارائه شد که موجبات معروفیت بیشتر تبدیل فوریه را فراهم کرد.

طرز کار تبدیل فوریه (FT) به این شکل است که:

FT هر سیگنال را به یک سری توابع نمایی مختلط با فرکانسهای متفاوت تجزیه می‌کند. طرز کار آن با دو معادله زیر تعریف می‌شود:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\text{®}ft}\,dt \qquad (۱)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\text{®}ft}\,df \qquad (۲)$$

در معادله فوق، t نشان دهنده زمان، f فرکانس، x نشان دهنده سیگنال مورد نظر و Xتبدیل یافته آن است. توجه کنید که x سیگنال در بعد زمان و X سیگنال در بعد فرکانس می‌باشد. این قرارداد برای متمایز کردن دو نمایش مختلف سیگنال استفاده می شود. رابطه شماره (۱) نشان دهنده تبدیل فوریه $x(t)$ و رابطه شماره (۲) عکس تبدیل فوریه $X(f)$، یعنی $x(t)$ است.

حال معادله شماره (۱) را دقیقتر بررسی می‌کنیم:

سیگنال $x(t)$، در یک عبارت نمایی در یک فرکانس خاص "f" ضرب، و سپس مجموع آن برای تمام زمانها محاسبه شده است (مطلب مهم در اینجا عبارت برای تمام زمانهاست که در ادامه شرح داده می‌شود).

توجه کنید که عبارت نمایی در رابطه شماره (۱) می‌تواند به شکل زیر هم نوشته شود:

---

[1]Non-stationary

[2] Wavelet

$$\cos(2\text{®}.f.t) + j\sin(2\text{®}.f.t) \qquad (۳)$$

که دارای یک قسمت حقیقی از کسینوس فرکانس f، و یک قسمت موهومی از سینوس فرکانس f است. بنابراین کاری که در واقع صورت می‌گیرد، ضرب سیگنال اصلی در یک عبارت مختلط است که شامل سینویها و کسینوسهای فرکانس f می‌باشد. سپس این حاصلضربها با هم جمع می‌شوند. اگر حاصل‌جمع مقدار بزرگی بود، می‌توان گفت که سیگنال $x(t)$، در فرکانس f دارای یک جزء طیفی غالب است. بدین معنا که سیگنال f قسمت عمده‌ای از سیگنال را تشکیل داده است. اگر این رابطه صفر شد، یعنی سیگنال اصلاً دارای فرکانس f نیست.

سیگنال در عبارت سینوسی فرکانس f ضرب می‌شود. اگر سیگنال دارای مقدار بزرگی در فرکانس f باشد، این جزء با عبارت سینوسی هم‌زمان خواهند بود و حاصلضرب آنها هم مقدار نسبتاً بزرگی را بدست می‌دهد. این امر نشاندهنده اینست که سیگنال x دارای جز فرکانسی عمده ای در f می باشد.

اگر سیگنال $x(t)$ در فرکانس f، دارای جزء عمده‌ای نباشد، حاصلضرب مقدار نسبتاً کوچکی خواهد بود.

توجه کنید که مجموع مورد نظر در عبارت شماره (۱) بر روی زمان محاسبه می‌شود. سمت چپ این عبارت تابعی از فرکانس است. بنابراین این حاصل‌جمع به ازای تک‌تک مقادیر f باید محاسبه شود.

توجه: اطلاعات ارائه شده در جمع ذکر شده، مربوط به تمام زمانها از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت می‌باشد. یعنی در هر زمانی فرکانس f اتفاق افتاده باشد تاثیر یکسانی در حاصل‌جمع دارد. این خصوصیت نشان دهنده اینست که چرا تبدیل فوریه برای سیگنالهایی که در طول زمان تغییر می‌کنند (سیگنالهای غیرایستا)، مناسب نیست.

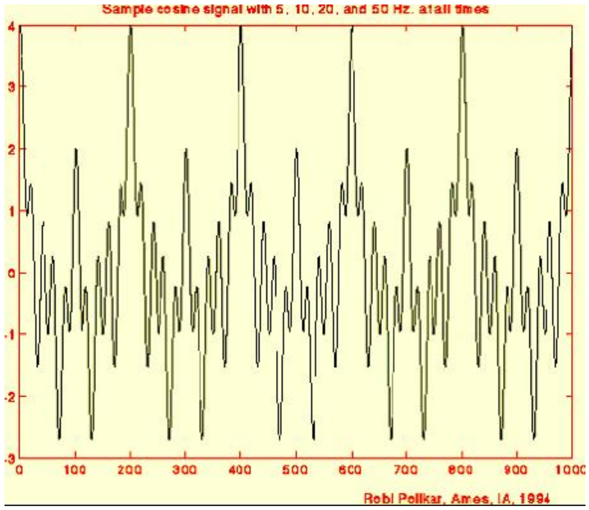
توجه کنید که تبدیل فوریه می‌گوید که آیا یک جزء فرکانسی خاص در سیگنال وجود دارد یا خیر. این اطلاعات مستقل از زمان وقوع این جزء است. این مهم است که قبل از پردازش یک سیگنال با FT بدانیم که آیا سیگنال ایستا است یا خیر.

شکل (۱) نشان دهنده سیگنال زیر است:

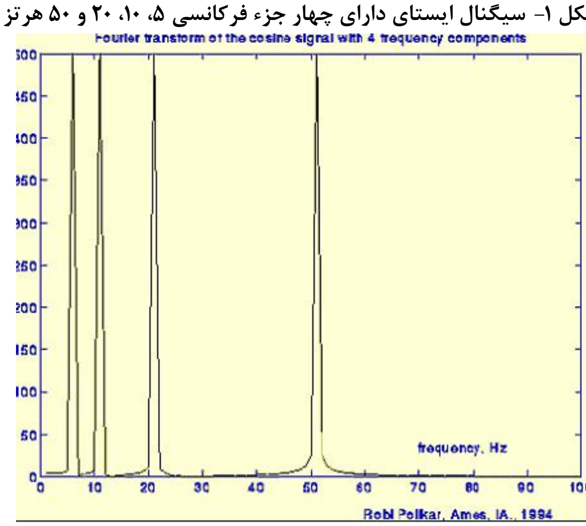
$$x(t) = \cos(2\text{®}\,5t) + \cos(2\text{®}\,10t) + \cos(2\text{®}\,20t) + \cos(2\text{®}\,50t) \qquad (۴)$$

این سیگنال دارای چهار جز فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز است که در تمام زمانها اتفاق افتاده‌اند. شکل (۲) تبدیل فوریه این سیگنال است. محور فرکانس در این شکل برای مقادیر محدودی نشان داده شده است. برای تبدیل فوریه پیوسته این تابع تا بی‌نهایت ادامه دارد. در واقع ما در اینجا تبدیل فوریه گسسته را محاسبه کرده‌ایم که محور فرکانس آن (حداقل) تا دو برابر فرکانسهای نمونه سیگنال بالا می‌رود و سیگنال منتقل شده متقارن است.

به چهار قله موجود در شکل (۲) که نشان دهنده چهار فرکانس مختلف است، توجه کنید.



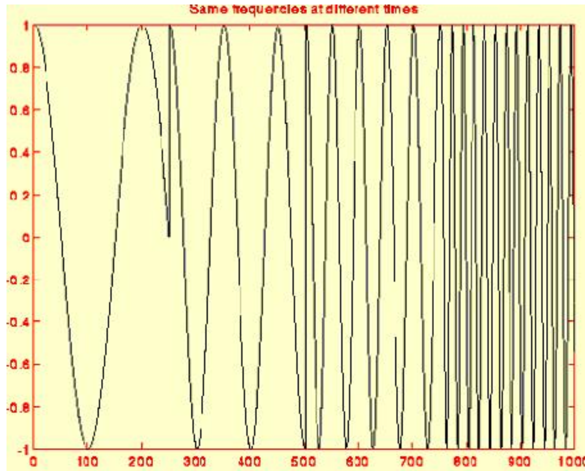
شکل ۱- سیگنال ایستای دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز



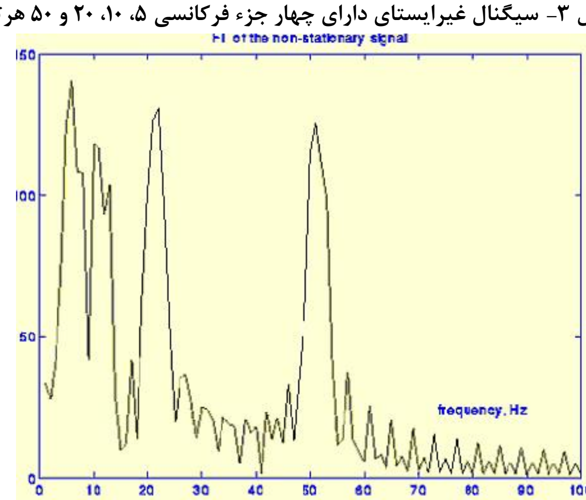
شکل ۲- تبدیل فوریه سیگنال شکل (۱)

حال به سیگنال شکل (۳) نگاه کنید.این سیگنال نیز یک سیگنال سینوسوئید است، و همان چهار فرکانس را دارد. لیکن این اجزاء در زمانهای متفاوتی رخ داده‌اند. شکل (۴) تبدیل فوریه این سیگنال را نشان می‌دهد.

همانطور که انتظار می‌رود، تبدیل این سیگنال نیز (تقریباً) شبیه سیگنال قبلی است. لطفاً به چهار قله‌ای که در نقاط ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز وجود دارد، توجه کنید. نویز مانندهایی که در بین دو قله وجود دارد، نشان دهنده آنست که این فرکانسها هم در سیگنال وجود دارد. و از آنجا که اجزا عمده‌ای در طیف سیگنال مورد نظر نیستند، دارای مقادیر کوچکی می‌باشند و دلیل پیدایش آنها هم تغییرات ناگهانی بین فرکانسهای مختلف است. بخصوص توجه کنید که چگونه سیگنال در بعد زمان در اطراف ۲۵۰ میلی ثانیه تغییر کرده است (با استفاده از فیلترهای مناسبی می‌توان این نویزها را از بین برد، که البته این مساله به موضوع بحث ما مربوط نیست).



شکل ۳- سیگنال غیرایستای دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز



شکل ۴- تبدیل فوریه سیگنال شکل (۳)

تا اینجا باید با مفاهیم پایه تبدیل فوریه آشنا شده باشید. همانطور که در مثال فوق متوجه شدید، تبدیل فوریه نمی‌تواند بخوبی دو سیگنال فوق را از هم تمیز دهد. تبدیل فوریه هر دو سیگنال فوق تقریباً یکی هستند چون شامل اجزا فرکانسی یکسانی می‌باشند. بنابراین تبدیل فوریه نمی‌تواند ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنالهای غیرایستا، که در طول زمان طیف آنها تغییر می کند، باشد.البته در مواقعی که زمان رخ دادن یک جز فرکانسی خاص مهم نباشد و فقط وجود فرکانسهای مختلف مد نظر باشد، تبدیل فوریه می تواند مفید باشد.

۱–۲–   تبدیل فوریه با دوره کوتاه (Short-term Fourier Transform)

سوال اینجاست که چگونه می‌توان زمان را وارد نمودار فرکانس کرد؟ اجازه بدهید ابتدا نگاه دقیقتری به مساله داشته باشیم.

خصیصه‌ای که در مورد تبدیل فوریه ایجاد مشکل می‌کرد این بود که تبدیل فوریه برای سیگنالهای غیرایستا عملکرد خوبی نداشت. حال آیا می توان در بازه‌های کوتاه زمانی سیگنال غیر ایستا را ایستا در نظر گرفت؟جواب مثبت است.

به شکل (۳) نگاه کنید. سیگنال در فاصله زمانهای ۲۵۰ واحدی ثابت است.

حال حتی اگر این فاصله‌های زمانی کوچک باشد، می‌توان پنجره را تنگتر در نظر گرفت، آنقدر تنگ که قسمتی از سیگنال که در زیر آن واقع می‌شود، واقعاً ثابت باشد.

این رویکرد محققان منجر به یک نسخه تجدید نظر شده از تبدیل فوریه با نام تبدیل فوریه با دوره کوتاه[3] (STFT) شد.در واقع فقط یک تفاوت کوچک بین FT و STFT وجود دارد. در STFT، سیگنال به بخشهایی تقسیم می‌شود بطوریکه هر بخش از سیگنال را بتوان ثابت فرض کرد. بدین منظور پنجره‌ای با تابعw انتخاب می‌شود که عرض آن برابر بخشی از سیگنال که ثابت است می‌باشد.

ابتدا این پنجره در شروع سیگنال قرار می‌گیرد یعنی تابع پنجره در t=0 قرار دارد. فرض کنید عرض پنجره T ثانیه باشد. در این زمان (t=0)، تابع پنجره با T/2 ثانیه ابتدا همپوشانی پیدا می‌کند (فرض شده که واحدهای زمانی بر حسب ثانیه هستند). سپس تابع پنجره و سیگنال در هم ضرب می‌شوند. با انجام این کار فقط T/2 از سیگنال با وزنهای مناسب انتخاب می‌شود (اگر پنجره مستطیلی شکل با مقادیر یک باشد، آنگاه حاصلضرب برابر خود سیگنال خواهد بود). سپس فرض می‌شود که این حاصلضرب یک سیگنال دیگر است، که باید تبدیل فوریه آن محاسبه شود.

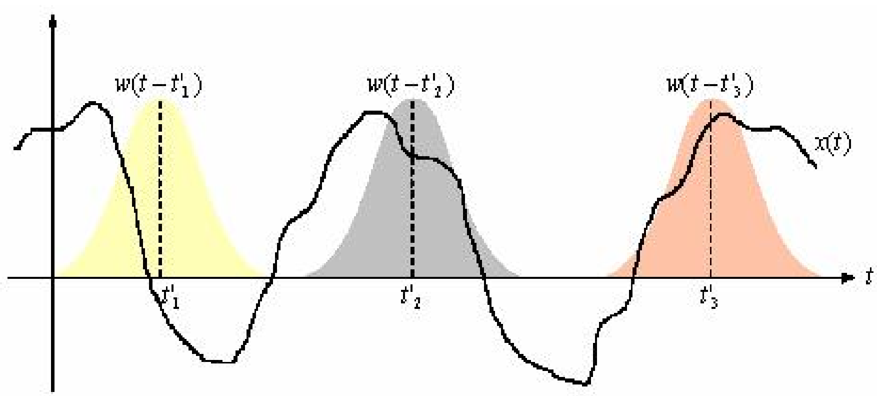
نتیجه این انتقال تبدیل فوریه T/2 ثانیه از سیگنال خواهد بود. اگر همانطور که فرض شده این بخش از سیگنال ایستا باشد، مشکلی وجود نخواهد داشت و نمایش صحیصی از فرکانس در این محدوده زمانی بدست خواهد آمد.

مرحله بعد تغییر مکان این پنجره (به ازای مقداری مثل t_1) به یک مکان جدید و تکرار مجدد مراحل فوق خواهد بود. این روند ادامه می یابد تا وقتی که با افزودن t_i ثانیه دیگر به انتهای سیگنال برسیم.

تعریف زیر تمام مراحل فوق در محاسبه STFTرا خلاصه می‌کند:

$$STFT_X^{(w)}(t', f) = \int_t [x(t).w^*(t-t')].e^{-j2\pi ft}dt \qquad (۵)$$

در رابطه فوق، *x(t)* خود سیگنال، *w(t)* تابع پنجره و *بیانگر مزدوج مختلط آن است. همانطور که می بینید، STFT چیزی نیست جز تبدیل فوریه حاصلضرب سیگنال در تابع پنجره.برای هر*t'*و *f* یک سری ضرایب STFT جدید محاسبه می‌شود. شکل (۵) به درک بهتر این مفهوم کمک می‌کند.



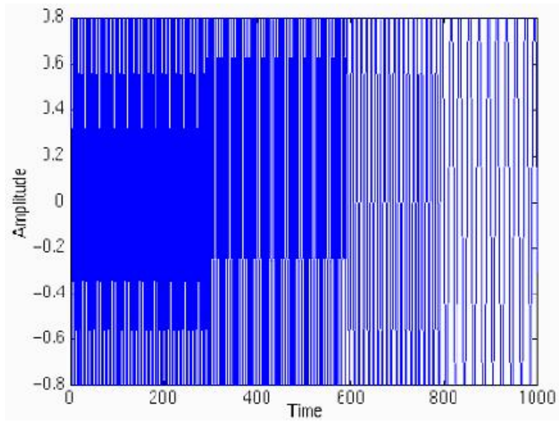
شکل ۵- اعمال پنجره *w(t)* به سیگنال *x(t)*

توابع شبه‌گوسی که بصورت رنگی آورده شده‌اند، توابع پنجره هستند. رنگ زرد نشان می‌دهد که پنجره در$t=t'_1$قرار دارد، در حالیکه پنجره‌های خاکستری و نارنجی به ترتیب نشان دهنده$t=t'_2$و $t=t'_3$هستند. اینها سه تبدیل فوریه

[3]Short-term FT or Short-time FT

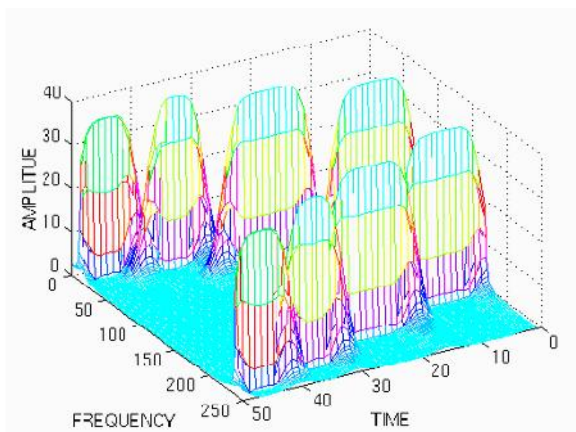
متفاوت در سه زمان متفاوت را نشان می‌دهند. بنابراین یک نمایش فرکانسی-زمانی صحیح از سیگنال بدست آورده‌ایم.

به یک مثال توجه کنید. در ابتدا از آنجا که این تبدیل تابعی است از زمان و فرکانس (برخلاف FT، که فقط تابعی از فرکانس بود)، باید بصورت دو بعدی باشد (سه بعدی اگر دامنه را هم در نظر بگیرید). یک سیگنال غیرایستا مانند شکل (۶) را در نظر بگیرید.



شکل ۶- نمونه‌ای از یک سیگنال غیرایستا

در این سیگنال چهار فرکانس متفاوت در چهار زمان مختلف وجود دارد. فاصله ۰ تا ۲۵۰ میلی‌ثانیه، سیگنال یک تابع سینوسی ساده با فرکانس ۳۰۰ هرتز است. در بازه‌های زمانی ۲۵۰ میلی‌ثانیه‌ای بعد نیز تابع سینوسی و با فرکانسهای ۲۰۰، ۱۰۰ و ۵۰ هرتز است. ظاهراً این یک سیگنال غیرایستا است. شکل (۷) STFTاین سیگنال را نمایش می‌دهد.



شکل ۷- STFT سیگنال شکل (۶)

همانطور که انتظار می رود، نمودار سه بعدی است. محورهای x و y بترتیب زمان و فرکانس هستند. بهارقام روی محورها توجه نکنید چرا که این مقادیر به شکل خاصی نرمالایز شده‌اند. فقط توجه خود را به شکل معطوف کنید.

در ابتدا توجه کنید که نمودار به نسبت خط میانی محور فرکانس متقارن است. تبدیل فوریه یک سیگنال همیشه متقارن است. از طرفیSTFTنیز صرفاً یک نسخه پنجره‌بندی شده ازFT است. بنابراین نباید تعجب کرد اگر STFT در بعد فرکانس دارای تقارن باشد. گفته می‌شود که بخش متقارن با فرکانسهای منفی همبستگی دارد، مفهوم عجیبی که درک آن مشکل است و خوشبختانه مهم نیست، فقط کافیست بدانید STFT و FT متقارن هستند.

چیزی که مهم است چهار قله موجود در نمودار است. توجه کنید که این چهار قله متناسب با چهار جزء فرکانسی موجود در دل سیگنال است. برخلاف FT، این چهار قله در فاصله زمانیهای متفاوتی در طی محور زمان قرار گرفته‌اند. بخاطر بیاورید که سیگنال اصلی دارای چهار جزء سیگنالی در زمانهای متفاوت بود.

مشکلی که در STFTوجود دارد به مفهومی به نام *اصل عدم قطعیت هیزنبرگ*[۴] مربوط است. این اصل به اندازه حرکت و مکان ذرات در حال حرکت برمی‌گردد که می تواند به عنوان اطلاعات زمان-فرکانس سیگنال بکار رود. این اصل بطور ساده می‌گوید که نمی‌توان نمایش دقیق و همزمان زمان-فرکانس یک سیگنال را بدست آورد، یعنی کسی نمی‌داند چه اجزای فرکانسی در هر زمان از نمونه‌ی یک سیگنال وجود دارد. چیزی که می‌توان فهمید فاصله‌های زمانی است که هر باند فرکانسی بوجود آمده، که خود مشکل درجه تفکیک‌پذیری یا رزلوشن را بوجود می‌آورد.

مشکل STFTناشی از عرض تابع پنجره‌ایست که باید استفاده شود. عرض تابع پنجره بعنوان پشتیبان پنجره شناخته می شود. این اصطلاح بیشتر در مورد موجک بکار می‌رود.

در تبدیل فوریه، مشکل درجه تفکیک‌پذیری وجود نداشت، چون در خصوص فرکانس ما دقیقاً می‌دانستیم چه فرکانسهایی وجود دارد.در مقابل، رزولوشن زمانی در FT و رزولوشن فرکانسی در بعد زمان صفر بود، چون هیچ اطلاعاتی در مورد آنها وجود نداشت. مساله‌ای که باعث می‌شود تبدیل فوریه رزولوشن فرکانسی کامل داشته باشد اینست که پنجره در FT، در واقع هسته آن یک تابع نمایی *exp(jwt)* است که برای همه زمانها از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت ادامه دارد. در حالیکه در STFT، پنجره دارای عرض محدودی است، بنابراین فقط قسمتی از سیگنال را پوشش می‌دهد که این امر باعث می‌شود تا درجه تفکیک پذیری فرکانسی پائین بیاید. بدین معنا که نمی‌توان اجزای فرکانسی درست را در سیگنال تشخیص داد و فقط می توان باندی از فرکانسها را بدست آورد.

در FT، تابع هسته امکان داشتن رزولوشن فرکانسی کامل را فراهم می‌کند، چرا که خود هسته پنجره‌ایست با عرض بینهایت. در مقابل دارایSTFT پنجره‌ای با عرض محدود است و بنابراین نمی‌توان رزولوشن کامل را داشت. حال اگر عرض پنجره را در STFT بینهایت بگیریم اطلاعات زمانی را از دست می‌دهیم و در واقع STFT را با FT جایگزین می‌کنیم.

اگر از پنجره‌ای با عرض بینهایت استفاده کنیم، رزولوشن فرکانسی کامل را خواهیم داشت لیکن اطلاعات زمانی را از دست می‌دهیم. بعلاوه، برای بدست آوردن یک سیگنال ایستا باید پنجره را آنقدر کوچک بگیریم که سیگنال در آن محدوده ایستا باشد. هر چه پنجره باریکتر باشد، رزولوشن زمانی و فرض ایستا بودن بهتری خواهیم داشت، ولی رزولوشن فرکانسی پائین خواهد آمد. بدین ترتیب

پنجره باریک <===== رزولوشن زمانی خوب، رزولوشن فرکانسی پائین

پنجره پهن <===== رزولوشن فرکانسی خوب، رزولوشن زمانی پائین

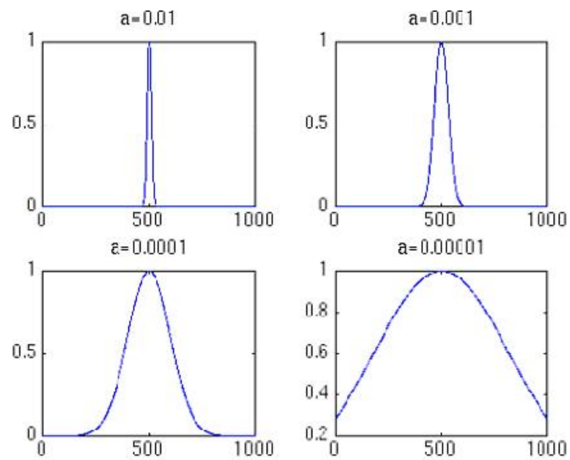
به دو مثال توجه کنید. چهار پنجره با طولهای متفاوت برای محاسبه STFT استفاده شده است.

تابع پنجره ای که استفاده می شود یک تابع گوسی با رابطه زیر است:

$$w(t) = e^{\frac{-a.t^2}{2}} \qquad (۶)$$

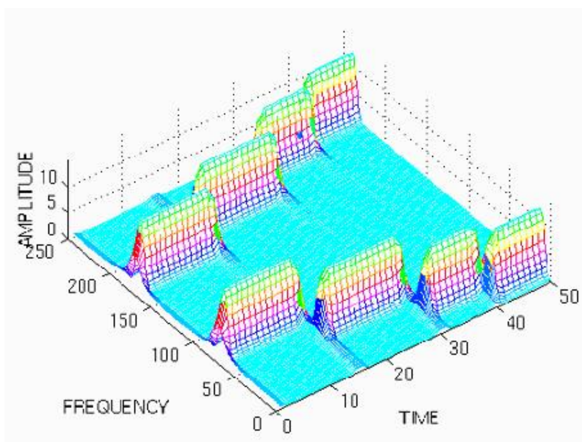
[4]Heisenberg

که در آن a نشان دهنده طول پنجره و tبیانگر زمان است. شکل (۸) چهار تابع مختلف گوسی را برای پنجره بکار رفته در STFT نشان می‌دهد. عرض پنجره تابعی از پارامتر a در رابطه فوق است. مثال فوق با مقدار a=0.001 محاسبه شده است.



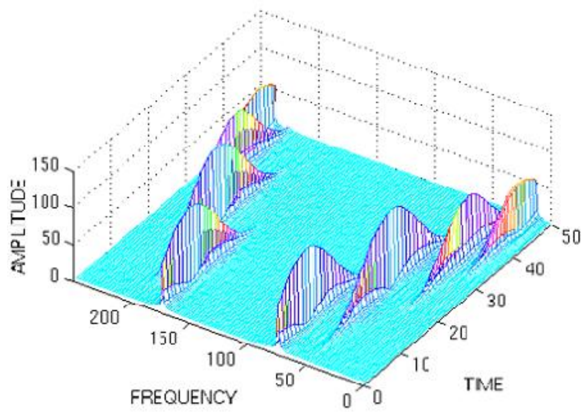
شکل ۸- پنجره گوسی با چهار عرض مختلف. عرض پنجره تابعی از پارامتر a است.

برای باریکترین پنجره انتظار داریم که STFT رزولوشن زمانی خوبی داشته باشد، لیکن رزولوشن فرکانسی پائین باشد. شکل (۹) را ببینید.



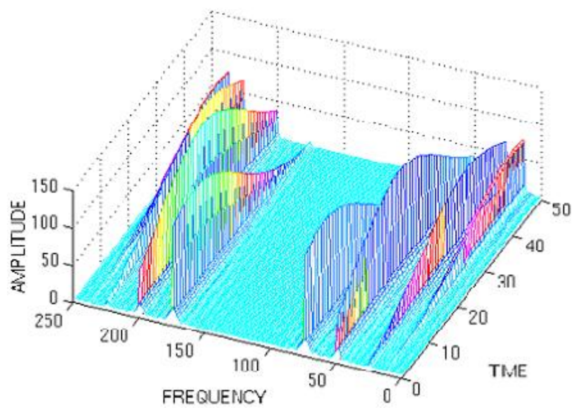
شکل ۹- STFT سیگنال شکل (۶) با پنجره گوسی و پارامتر a=0.01 یعنی باریکترین پنجره.

توجه کنید که چهار قله در محور زمان از هم جدا شده‌اند و ضمناً در بعد فرکانس نیز، هر قله نشان دهنده یک محدوده فرکانسی است نه یک مقدار فرکانس مشخص. حال بیایید عرض پنجره را بیشتر بگیریم. شکل (۱۰) را ببینید.



شکل ۱۰- STFT سیگنال شکل (۶) با پنجره گوسی پهن‌تر از پنجره بکار رفته در شکل (۹)

توجه کنید که قله ها در طول محور زمان بخوبی از هم جدا نشده‌اند، ولی در مقابل رزولوشن فرکانسی بهبود یافته است. بیایید باز هم عرض پنجره را اضافه کنیم. شکل (۱۱) را ببینید.



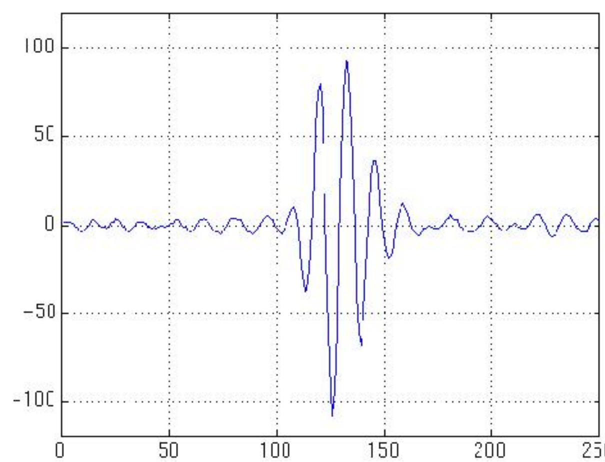
شکل ۱۱- STFT سیگنال شکل (۶) با پنجره گوسی پهن‌تر از پنجره بکار رفته در شکل (۱۰)

این مثالها مساله رزولوشن در STFT را نشان می‌دهند. استفاده از STFTهمیشه ما را درگیر مساله رزولوشن می‌کند. و بنابراین همیشه با این سوال مواجه هستیم که چه پنجره‌ای را استفاده کنیم؟ نکته قابل ذکر اینکه اگر در سیگنال اصلی اجزا فرکانسی از یکدیگر مجزا باشند، می‌توان تا حدودی رزولوشن فرکانسی را از دست داد و در مقابل رزولوشن زمانی را بالا برد چرا که فرکانسهای مختلف بخوبی از یکدیگر مجزا هستند.

با توجه به مشکل رزلوشن،تبدیل موجک سعی در حل این مشکل اساسی دارد.

۲- تحلیل چند رزلوشنی

اگر چه مشکلات رزولوشن زمان و فرکانس نتیجه یک پدیده فیزیکی است (اصل عدم قطعیت هِیزنبرگ) و علیرغم تبدیل معرفی شده، می توان هر سیگنال را با استفاده از یک رویکرد دیگر به نام آنالیز چند رزلوشنی[۵] (MRA) تحلیل کرد. MRA همانطور که از نامش پیداست، سیگنال را در فرکانسهای مختلف با رزولوشنهای متفاوت تحلیل می‌کند.در این حالت هر جزء طیف به شکلی که در STFT وجود داشت، تجزیه نمی‌شود.
MRA به نحوی طراحی شده که برای فرکانسهای بالا رزولوشن زمانی خوب و رزولوشن فرکانسی ضعیف و برای فرکانسهای پائین، رزولوشن فرکانسی خوب و رزولوشن زمانی ضعیف را نتیجه دهد. این رویکرد بخصوص زمانی مفید است که سیگنال مورد نظر برای دوره‌های کوتاه، دارای اجزاء با فرکانس بالا و برای دوره‌های طولانی‌تر دارای اجزاء با فرکانس پائین‌تر باشد. خوشبختانه سیگنالهایی که در کاربردهای عملی با آنها مواجه می‌شویم غالباً از این نوع هستند. بعنوان مثال، شکل (۱۲) سیگنالی از این نوع را نشان می دهد. این سیگنال تقریباً برای تمام قسمتها دارای جزء با فرکانس نسبتاً پایین و برای دوره‌ی کوتاهی در میانه‌های سیگنال دارای اجزای با فرکانس و دامنه بالا است.



شکل ۱۲- سیگنالی با فرکانسهای پایین در کل سیگنال و فرکانسها و دامنه‌های بالا در بخش میانی

[5]Multi-resolution analyze

۲–۱– تبدیل موجک پیوسته[۶] (CWT)

تبدیل موجک پیوسته بعنوان یک رویکرد دیگر از STFT و برای حل مشکل تفکیک‌پذیری بوجود آمد. تحلیل موجک به روشی مشابه STFT صورت می‌گیرد. سیگنال در یک تابع (تابع موجک) ضرب می‌شود که مشابه تابع پنجره در STFT است و تبدیل بطور جداگانه برای قسمتهای مختلف سیگنال در بعد زمان محاسبه می‌شود. هر چند دو تفاوت عمده بین CWT و STFT وجود دارد:

۱- تبدیلهای فوریه سیگنالهای پنجره‌بندی شده محاسبه نخواهند شد، و لذا قله‌های سیگنال بصورت سینوسی فرض می‌شوند، بدین معنی که فرکانسهای منفی در نظر گرفته نمی‌شوند.

۲- عرض پنجره به ازای محاسبه هر جز طیف تغییر می‌کند، که این خصیصه احتمالاً عمده‌ترین مشخصه تبدیل موجک است.

تبدیل موجک پیوسته به شکل زیر تعریف می شود:

$$CWT_x^{\psi}(\tau,s)=\Psi_x^{\psi}(\tau,s)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int x(t)\cdot\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{s}\right)dt \qquad (۷)$$

همانطور که در رابطه فوق دیده می‌شود، سیگنال تبدیل شده، تابعی است از دو متغیر،τ و s، که به ترتیب پارامترهای انتقال و مقیاس هستند. $\psi(t)$ تابع تبدیل است و موجک مادر نامیده می‌شود. این نام به دلیل دو خصیصه مهم تحلیل موجک که در ادامه توضیح داده شده، تخصیص یافته است.

عبارت موجک یعنی موج کوچک. کوچکی مرتبط با این معنی است که تابع (پنجره) دارای طول محدود (پشتیبان فشرده) است. موج نیز بدین معنی است که تابع دارای شکل نوسانی است. عبارت مادر دلالت بر این دارد که توابع با مکان‌ها و پشتیبان‌های متفاوت که در فرآیند تبدیل استفاده می شوند، از یک تابع اصلی یا موجک مادر مشتق شده‌اند. به بیان دیگر، موجک مادر یک نمونه اولیه برای ساخت سایر توابع پنجره است.

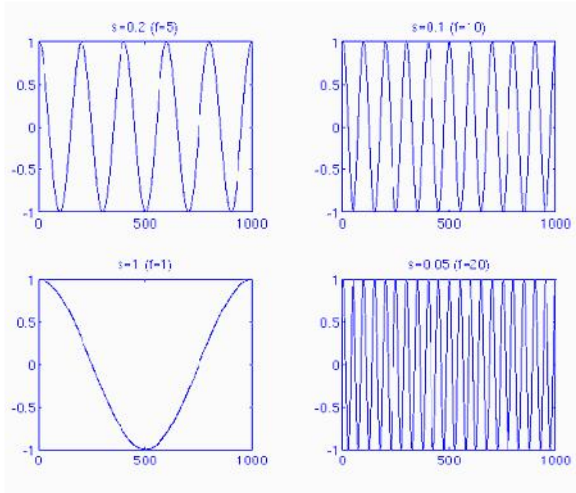
عبارت انتقال در اینجا به همان معنایی است که در STFT بود و بهفرایندی که پنجره در طول سیگنال تغییر مکان می دهد، مربوط می‌شود. بدیهی است که این عبارت، بر اطلاعات زمانی در فضای تبدیل دلالت دارد. در این حالت بر خلافSTFT، پارامتر فرکانس نداریم، در عوض پارامتری با نام مقیاس وجود دارد که در ادامه با جزئیات بیشتر توضیح داده می شود.

۲–۱–۱– مقیاس

این پارامتر در تجزیه و تحلیل موجک، مشابه مقیاسی است که در نقشه‌ها استفاده می‌شود. همانند نقشه، مقیاس‌های بالا نشان‌دهنده یک دید کلی فاقد جزئیات (از سیگنال) و مقیاسهای پائین نشان‌دهنده یک دید با تفصیل بیشتر هستند. به طور مشابه، در مورد فرکانسها، فرکانسهای پائین (مقیاسهای بالا) نمایانگر اطلاعات کلی یک سیگنال (که معمولاً تمام محدوده یک سیگنال را می پوشانند)، هستند در حالیکه فرکانسهای بالا (مقیاسهای پائین) نمایانگر اطلاعات جزئی یک الگوی پنهان در سیگنال (که معمولاً مربوط به یک زمان نسبتاً کوتاه می‌شود) می‌باشند. سیگنالهای کسینوسی مربوط به مقیاسهای مختلف در شکل زیر آورده شده است:

---

[6] Continues Wavelet Transform



شکل ۱۳- مقیاسهای مختلف یک تابع کسینوسی

خوشبختانه در کاربردهای عملی، مقیاسهای پائین (فرکانسهای بالا) تمام دوره سیگنال را برخلاف آنچه در شکل نشان داده شده، دربر نمی‌گیرند، و در طول زمان بصورت انفجاری ظاهر می‌شوند در حالیکه مقیاسهای بالا (فرکانسهای پائین) معمولاً در تمام دوره سیگنال تداوم دارند.

مقیاس‌گذاری، بعنوان یک عملیات ریاضی، ممکن است یک سیگنال را فشرده یا باز کند. مقیاسهای بزرگتر نشان‌دهنده سیگنالهای باز شده و مقیاسهای کوچکتر نشان‌دهنده سیگنالهای فشرده شده هستند. تمام سیگنالهای شکل فوق از یک سیگنال کسینوسی مشابه مشتق شده‌اند. به عبارت دیگر نسخه‌های باز شده یا فشرده شده یک کسینوس هستند. در شکل (۱۳)، $s=0.05$ کوچکترین و $s=1$ بزرگترین مقیاس است.

اگر $f(t)$ یک تابع ریاضی باشد، آنگاه $f(si)$ منقبض شده (فشرده شده) $f(t)$ است اگر $s>1$ و یک نسخه بازشده است در صورتیکه داشته باشیم $s<1$.

بهر حال، در تعریف تبدیل موجک، مقیاس در مخرج استفاده شده، یعنی عکس عبارت فوق برقرار است، $s>1$ سیگنال را باز و $s<1$ سیگنال را فشرده می‌کند.

۲-۱-۲- محاسبه CWT

شرح رابطه (۷) در این قسمت آورده شده است. فرض کنید $x(t)$ سیگنالی است که قرار است تجزیه شود. موجک مادر بعنوان یک نمونه اولیه برای تمام پنجره‌ها انتخاب شده است. تمام پنجره‌هایی که استفاده می‌شوند، نسخه‌های باز شده (فشرده شده) و شیفت داده شده موجک مادر هستند. تعدادی تابع وجود دارند که برای این منظور استفاده می‌شوند. در مثالهای این بخش از Morletموجک و تابع کلاه مکزیکی استفاده شده است که بعداً آنها را توضیح خواهیم داد.

بعد از اینکه موجک مادر انتخاب شد، محاسبات با $s=1$ آغاز می‌شود و CWT برای تمام مقادیر s بزرگتر و کوچکتر از یک محاسبه می‌شود. لیکن، بسته به سیگنال، یک تبدیل کامل معمولاً نیاز نیست. برای تمام اهداف عملی، سیگنال محدود می‌شود. بنابراین، محاسبه تبدیل برای فاصله زمانی‌های محدود مقیاسها کافیست. در این مطالعه، مقادیر فاصله محدودی برای s استفاده شده است که بعداً توضیح داده خواهد شد.

برای راحتی کار، پروسه با مقیاس s=1 شروع شده و با افزایش مقادیر s ادامه می‌یابد، بدین معنا که تجزیه از فرکانسهای بالا شروع شده و به سمت فرکانسهای پائین ادامه می‌یابد. مقدار اولیه s نشان دهنده فشرده‌ترین موجک است. با افزایش مقدار s، موجک بازتر خواهد شد.

موجک در آغاز سیگنال یعنی نقطه‌ای که زمان برابر صفر است، قرار می‌گیرد. تابع موجک در مقیاس یک در سیگنال ضرب می‌شود و سپس بر روی تمام حاصلضرب‌ها جمع انجام می‌گیرد. نتیجه جمع، سپس، در عدد ثابت 1/sqrt(t) ضرب می‌شود. این ضرب برای اهداف نرمال‌سازی انرژی است، بطوری که سیگنال تبدیل شده به ازای تمام مقیاسها انرژی یکسانی داشته باشد. نتیجه نهایی مقدار تبدیل است، یعنی مقدار CWT در زمان صفر و مقیاس s=1. به بیان دیگر، این مقداریست مطابق با نقطه $\tau=0$ و s=1 در مقیاس زمان.

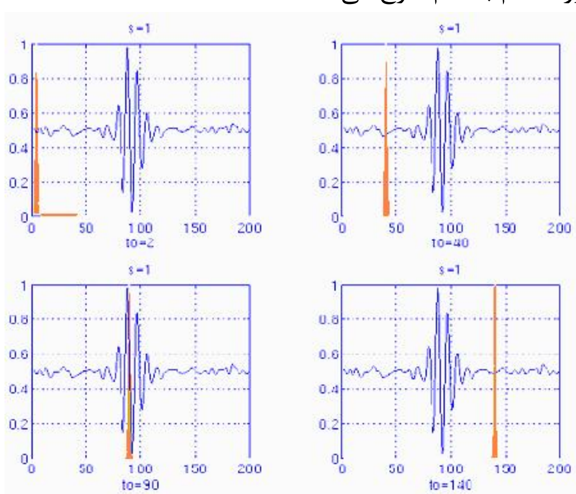
موجک در مقیاس s=1 سپس به اندازه τ به سمت راست شیفت داده می‌شود، $t=\tau$، و رابطه فوق برای بدست آوردن مقدار تبدیل در$t=\tau$ و s=1 در فضای فرکانس محاسبه می‌شود.

این روند تا وقتی که موجک به انتهای سیگنال برسد، ادامه پیدا می‌کند. در این مرحله، یک سطر از نقاط مقیاس زمان برای s=1 محاسبه شده است.

سپس، s به اندازه کمی افزایش می‌یابد. توجه کنید که این یک تبدیل پیوسته است وτو s باید بصورت پیوسته افزایش پیدا کنند. حال اگر قرار باشد این فرآیند توسط کامپیوتر انجام شود، هردوی این پارامترها به یک اندازه کوچک مناسب افزایش پیدا می‌کنند. این به معنای نمونه برداری در مقیاس زمان است.

فرآیند فوق به ازای تمام مقادیر s تکرار می‌شود. هر بار محاسبه با یک مقدار s، یک سطر متناظر در صفحه مقیاس زمان را پر می‌کند.

تصاویر زیر تمام فرآیند را بصورت گام به گام شرح می دهند:



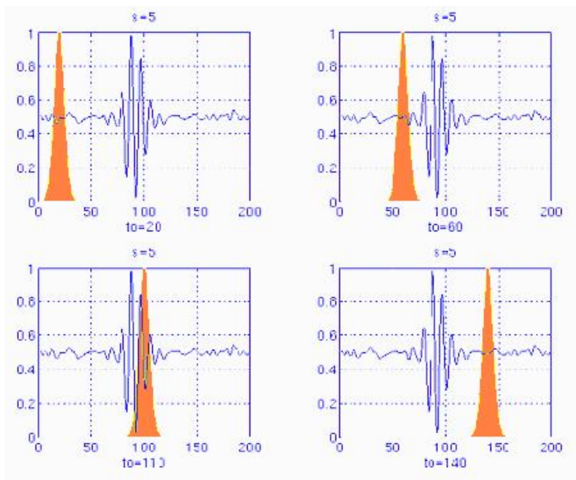
شکل ۱۴- فرایند محاسبه تبدیل موجک در یک مقیاس خاص

در این شکل سیگنال و موجک برای چهار مقدار متفاوتτنشان داده شده‌اند. سیگنال یک نسخه قطع شده از سیگنال شکل (۱۳) است. مقیاس یک، متناظر با پایین‌ترین مقیاس یا بالاترین فرکانس می‌باشد. به فشردگی آن توجه کنید (پنجره آبی). چهار مکان مجزا از تابع موجک در شکل نشان داده شده است،$\tau=2$،$\tau=40$، $\tau=90$ و $\tau=140$. در هر مکان، موجکدر سیگنال ضرب شده است. واضح است که حاصلضرب، وقتی سیگنال در مناطقی که موجک را پشتیبانی می‌کنند (مکانهایی که موجک غیر صفر است)، قرار می‌گیرد، غیر صفر و برای سایر قسمتها صفر است. با

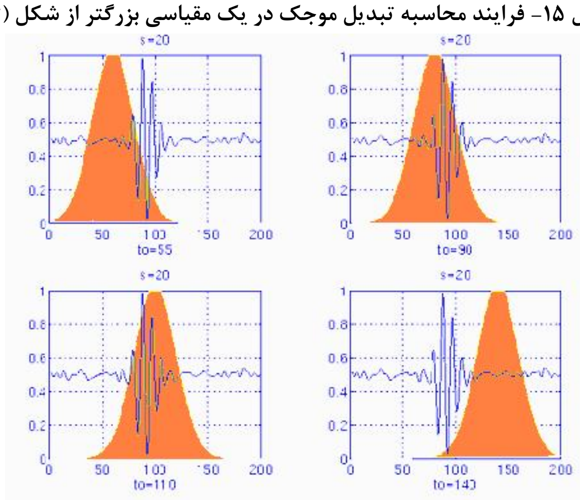
تغییر مکان موجک در طول زمان، سیگنال در طول زمان محلی می‌شود، و با تغییر مقدار s، سیگنال در مقیاس (فرکانس) محلی خواهد شد.

اگر سیگنال دارای یک جزء طیفی باشد که مطابق با مقدار فعلی s باشد (که در این مورد ۱ است)، ضرب موجک در سیگنال در مکانی که آن جزء طیفی وجود دارد، یک مقدار نسبتاً بزرگ را نتیجه می‌دهد. اگر جز طیفی که متناظر با مقدار فعلی s باشد در سیگنال موجود نباشد، مقدار حاصلضرب نسبتاً کوچک یا صفر خواهد بود. سیگنال شکل (۱۴) در حوالی t=100 ms اجزای طیفی قابل مقایسه با عرض پنجره در s=1 داشته است.

CWT سیگنال شکل (۱۴) در حوالی ۱۰۰ میلی ثانیه برای مقیاسهای پائین مقادیر بزرگ، و در جاهای دیگر مقادیر کوچکی را نتیجه می‌دهد. برای مقیاسهای بالا، CWT تقریباً برای کل دوره سیگنال مقادیر بزرگی را می‌دهد چرا که فرکانسهای پائین در تمام زمانها وجود دارند.



شکل ۱۵- فرایند محاسبه تبدیل موجک در یک مقیاسی بزرگتر از شکل (۱۴)

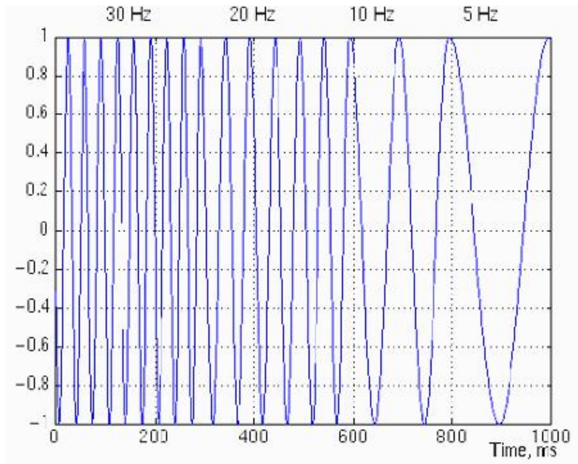


شکل ۱۶- فرایند محاسبه تبدیل موجک در مقیاسی بزرگتر از شکل (۱۵)

شکل‌های (۱۵) و (۱۶)، همان روند را به ترتیب برای مقیاسهای s=5 و s=20 نشان می‌دهند.توجه کنید که چگونه عرض پنجره با افزایش مقیاس (کاهش فرکانس) تغییر می‌کند. وقتی عرض پنجره افزایش پیدا می‌کند، تبدیل اجزای با فرکانس پائین‌تر را در نظر می‌گیرد.

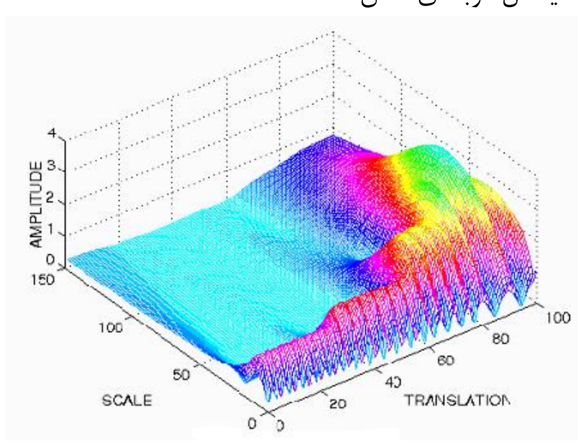
بعنوان نتیجه، برای هر مقیاس و هر زمان (فاصله زمانی)، یک نقطه از صفحه‌ی مقیاس زمان محاسبه می‌شود. محاسبات در یک مقیاس یک سطر، و محاسبه مقیاسهای مختلف ستونهای صفحه‌ی مزبور را می‌سازند.

حال به یک مثال توجه کنید و ببینید که تبدیل موجک واقعاً به چه شکل است. یک سیگنال غیرایستا که در شکل (۱۷) نشان داده شده است، را در نظر بگیرید. این شبیه مثالی است که در مورد STFT آورده شده فقط در فرکانسهای متفاوت. همانطور که در شکل نشان داده شده، سیگنال تشکیل شده از چهار جزء فرکانسی ۳۰، ۲۰، ۱۰ و ۵ هرتز.



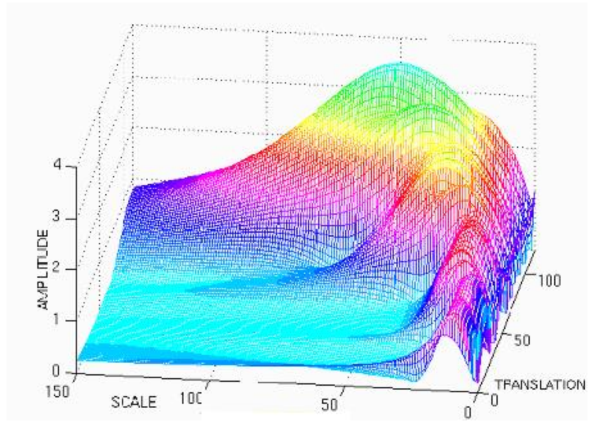
شکل ۱۷- نمونه‌ای از یک سیگنال غیر ایستا متشکل از چهار جزء فرکانسی ۳۰، ۲۰، ۱۰ و ۵ هرتز

شکل (۱۸)، تبدیل موجک پیوسته این سیگنال است. توجه کنید که محورها تبدیل و مقیاس هستند و نه زمان و فرکانس. از آنجا که تبدیل دقیقاً وابسته به زمان است، این محور نشان می‌دهد، موجک مادر کجا قرار گرفته است. مقیاس یک داستان کاملاً متفاوت دارد. به خاطر بیاورید که پارامتر مقیاس در رابطه (۷) کاملاً عکس فرکانس بود. به بیان دیگر، هر آنچه که در مورد مشخصات تبدیل موجک در خصوص درجه تفکیک پذیری فرکانس گفتیم، عکس آنچیزی است که توسط WT سیگنال دوبعدی نشان داده شده است.



شکل ۱۸- تبدیل موجک پیوسته سیگنال شکل (۱۷)

توجه کنید که در شکل فوق، آن قسمت از گراف که مقیاسهایی نزدیک به صفر دارد، در واقع مربوط به فرکانسهای بالا است. سیگنال در ابتدا دارای جز ۳۰ هرتز (بالاترین فرکانس) بود، که در کوچکترین مقیاس در تبدیل ۰ تا ۳۰ ظاهر شده است. سپس دومین فرکانس یعنی ۲۰ هرتز آمده و همینطور الی آخر.



شکل ۱۹- تبدیل موجک پیوسته سیگنال شکل (۱۷) از زاویه‌ای دیگر (نسبت به شکل ۱۸)

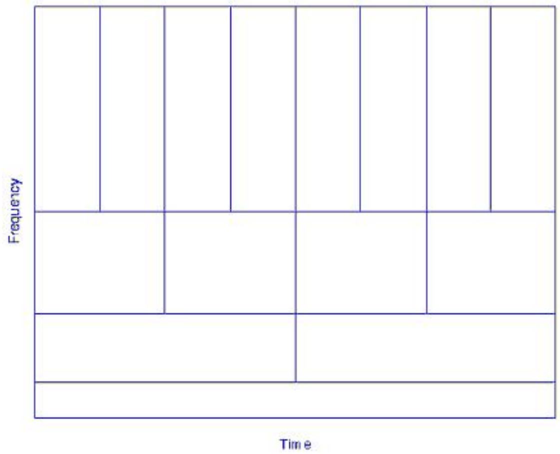
حال با این مشخصات تفکیک پذیری، برخلاف STFT که یک درجه تفکیک پذیری ثابت برای تمام زمانها و فرکانسها داشت، WT درجه تفکیک‌پذیری زمانی خوب و فرکانسی بد برای فرکانسهای بالا، و تفکیک پذیری فرکانسی خوب و زمانی بد برای فرکانسهای پائین دارد. شکل (۱۹) همان تبدیل (۱۸) اما از زاویه دیگری که خصایص تفکیک‌پذیری را بیشتر مشخص نمایش می‌دهد. در شکل (۱۹) مقیاسهای پائین تفکیک‌پذیری مقیاس بهتر دارند که متناظر است با تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف.

محورها در شکلهای (۱۸) و (۱۹) نرمال شده‌اند. تقریباً ۱۰۰ نقطه در محور تبدیل متناظر با ۱۰۰۰ میلی ثانیه و ۱۵۰ نقطه در محور مقیاس متناظر با یک باند فرکانسی ۴۰ هرتز است (اعداد روی محورهای تبدیل و مقیاس مطابق با ثانیه و هرتز نیستند، فقط تعداد نمونه‌ها در محاسبات را نشان می‌دهند).

۲-۱-۳- رزولوشنهای زمانی و فرکانسی

در این قسمت به صورت دقیقتری مشخصات رزولوشن تبدیل موجک را بررسی می‌کنیم. به خاطر بیاورید که مشکلات رزولوشن مهمترین دلیل برای انتخاب WT بود.

شکل (۲۰) غالباً برای شرح رزولوشنهای زمانی و فرکانسی استفاده می‌شود. هر چهار ضلعی در این شکل متناظر با مقدار تبدیل موجک در صفحه زمان-فرکانس است. توجه کنید که این چهارضلعیها یک سطح غیر صفر خاص دارند که نشان دهنده اینست که مقدار یک نقطه خاص در صفحه زمان–فرکانس نامشخص است. تمام نقاطی که در یک چهارضلعی قرار بگیرند، با یک مقدار WT نشان داده می‌شوند.



شکل ۲۰- رزولوشنهای زمانی و فرکانسی در تبدیل موجک

اولین چیزی که باید به آن توجه شود اینست که اگرچه طول و عرضهای چهارضلعیها تغییر می‌کند، لیکن مساحت ثابت است. یعنی هر چهارضلعی یک قسمت مساوی از صفحه زمان – فرکانس را نشان می‌دهد. در فرکانسهای پایین، ارتفاع چهارضلعیها کمتر (رزولوشن فرکانسی بهتر) ولی عرض آنها بیشتر است (رزولوشن زمانی ضعیفتر). در فرکانسهای بالاتر، عرض چهارضلعیها کاهش می یابد یعنی رزولوشن زمانی بهتر می شود و ارتفاع آنها افزایش می‌یابد، بدین معنا که رزولوشن فرکانسی ضعیفتر می‌شود.

در مورد STFT رزولوشن زمانی و فرکانسی ثابت است بنابراین چهارضلعیها به شکل مربع خواهند بود. صرفنظر از ابعاد چهارضلعیها، مساحت تمام آنها، در STFT و WT یکی است و توسط نامعادله هایزنبرگ تعیین می‌شود. بعنوان خلاصه، مساحت یک چهارضلعی، برای هر تابع پنجره (STFT) یا موجک مادر ثابت است، در حالیکه پنجره‌ها یا موجک مادرهای متفاوت ممکن است مساحتهای متفاوتی داشته باشند. یعنی نمی‌توان مساحت چهارضلعیها را بنا به اصل هایزنبرگ به هر اندازه‌ای افزایش داد. از طرف دیگر، برای یک موجک مادر مشخص، ابعاد چهارضلعیها ممکن است تغییر کند در حالیکه مساحتها یکی است. این دقیقاً کاریست که تبدیل موجک انجام می‌دهد.

۳- تئوری موجک: دیدگاه ریاضی

این بخش ایده اصلی تجزیه و تحلیل موجک، که می‌تواند پایه بیشتر تکنیکهای آنالیز سیگنال باشد را شرح می‌دهد. FT که توسط Fourier تعریف شد، از یکسری توابع پایه برای آنالیز و دوباره‌سازی تابع استفاده می‌کند. هر بردار در یک فضای بردار می‌تواند بصورت یک ترکیب خطی بردارهای پایه آن فضای بردار نوشته شود، یعنی با ضرب بردارها در اعداد ثابت و سپس جمع حاصلضربها. آنالیز سیگنال شامل تخمین این اعداد ثابت است (ضرایب تبدیل، یا ضرایب فوریه، ضرایب موجک و غیره). ترکیب یا ترمیم برابر است با محاسبه معادله ترکیب خطی.

تمام تعاریف و تئوریهای مربوط به این موضوع در کتاب Keiser،"A Friendly Guide to Wavelet"موجود است.

۳–۱– بردارهای پایه

یک پایه برای فضای بردار V، یک مجموعه بردارهای مستقل خطی است که هر بردار v در V می تواند بصورت ترکیب خطی این بردارها نوشته شود. ممکن است برای یک فضای بردار بیش از یک پایه وجود داشته باشد. لیکن تمام آنها دارای تعداد بردارهای یکسان و برابر با بعد آن فضای بردار خاص هستند. بعنوان مثال، در فضای دوبعدی، پایه دو بردار خواهد داشت:

$$\mathrm{v} = \sum_{k} \neg^{k} b_{k} \tag{۸}$$

این مفهوم می تواند به راحتی به توابع تعمیم داده شود:

$$f(t) = \sum_{k} \text{«}_{k} \text{¤}_{k}(t) \tag{۹}$$

توابع نمایی مختلط (سینوسها و کسینوسها) توابع پایه برای FT هستند. اغلب توابعی متعامد هستند که یک سری خصایص مطلوب برای قسمت ترکیب دارند.

فرض کنید f(t) و g(t) دو تابع در L^2[a,b] (L^2[a,b]، نشان دهنده مربع توابع انتگرال‌پذیر در فاصله [a,b] است) باشند. ضرب داخلی دو تابع در رابطه (۱۰) تعریف شده است:

$$< f(t), g(t) >= \int_{a}^{b} f(t).g^{*}(t)dt \tag{۱۰}$$

بر طبق تعریف فوق از ضرب داخلی، CWT می‌تواند به شکل ضرب داخلی سیگنال مورد نظر در توابع پایه $\cdot_{^2,s}(t)$ فرض شود:

$$CWT_{x}^{\cdot}(^{2}, s) = \Psi_{x}^{\cdot}(^{2}, s) = \int x(t).\cdot^{*}_{^2,s}(t)dt \tag{۱۱}$$

که در آن،

$$\cdot_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \left(\frac{t-2}{s}\right) \qquad (۱۲)$$

ضرایب CWT نزدیکی سیگنال به موجک را در مقیاس فعلی نشان می دهند.

۳–۲– ضرب داخلی، متعامد بودن و Orthonormality

دو بردار v و w متعامد هستند اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد:

$$< v, w >= \sum_n v_n w_n^* = 0 \qquad (۱۳)$$

بطور مشابه دو تابع f و g متعامد هستند اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد:

$$< f(t), g(t) >= \int_a^b f(t).g^*(t)d(t) = 0 \qquad (۱۴)$$

یک مجموعه بردارهای {v_1,v_2,…,v_n}orthonormal هستند اگر دو به دو متعامد و همگی طول واحد داشته باشند:

$$\langle V_m, V_n \rangle = ¢_{mn} \qquad (۱۵)$$

بطور مشابه، در مورد توابع نیز این تعریف را داریم:

$$\int_a^b ¤_k(t)¤_l^*(t)dt = 0 \quad k \neq l \;\; (orthogonality\ cond.) \qquad (۱۶)$$

و

$$\int_a^b \left\{|¤_k(t)|\right\}^2 dx = 1 \qquad (۱۷)$$

یا معادل آن

$$\int_a^b ¤_k(t)¤_l^*(t)dt = ¢_{kl} \qquad (۱۸)$$

که در آن $¢_{kl}$تابع دلتا است و بصورت ذیل تعریف می شود:

$$¢_{kl} = \begin{cases} 1 & if\ \ k = l \\ 0 & if\ \ k \neq l \end{cases} \qquad (۱۹)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، ممکن است بیش از یک مجموعه توابع (یا بردارهای) پایه وجود داشته باشد. در میان آنها توابع پایه orthonormal، به دلیل مشخصات جالبی که در پیدا کردن ضرایب تحلیلی ارائه می دهند، از اهمیت خاصی برخوردار هستند. با استفاده از این توابع محاسبات این ضرایب به طرز ساده و سرراستی انجام می‌شود.

برای توابع orthonormal ضرایب $«_k$ را می توان به این شکل بدست آورد:

$$«_k = \langle f, ¤_k \rangle = \int f(t).¤_k^*(t)dt \qquad (۲۰)$$

و با جایگزین کردن ضرایب $«_k$ بدست آمده از این رابطه در رابطه (۹) داریم:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \alpha_k \psi_k \\ &= \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t) \end{aligned} \tag{۲۱}$$

توابع پایه orthonormal برای هر نوع کاربردی وجود ندارند، در حالیکه نسخه تعمیم یافته آنها یعنی توابع پایه biorthogonal این مشکل را ندارند. biorthogonal توابع پایه‌ای را مشخص می‌کند که نسبت به هم orthogonal هستند ولی یک مجموعه orthogonal را تشکیل نمی‌دهند.

لیکن توابع biorthogonal نیز در تمام مواردی که frame ها استفاده می‌شوند در دسترس نیستند. frame ها بخش مهمی از تئوری موجک را تشکیل می‌دهند و برای اطلاع بیشتر خوانندگان می‌توانند به کتاب Kaiser که قبلاً اشاره شد، رجوع کنند.

به همان ترتیب که بخش مربوط بهSTFT داشتیم، در ادامه چند مثال از تبدیل موجک پیوسته ارائه می‌دهیم. تصاویر این مثالها، توسط برنامه‌ای که برای محاسبه CWT نوشته شده، تولید شده است.

قبل از اینکه این بخش را به پایان برسانیم، دو موجک مادری را که معمولاً برای تحلیل موجک از آنها استفاده می‌کنیم را نشان می‌دهیم. موجک کلاه مکزیکی به عنوان مشتق دوم تابع گوسین تعریف می‌شود:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \tag{۲۲}$$

که:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right)\right) \tag{۲۳}$$

و موجکMorlet نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi(t) = e^{iat} . e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \tag{۲۴}$$

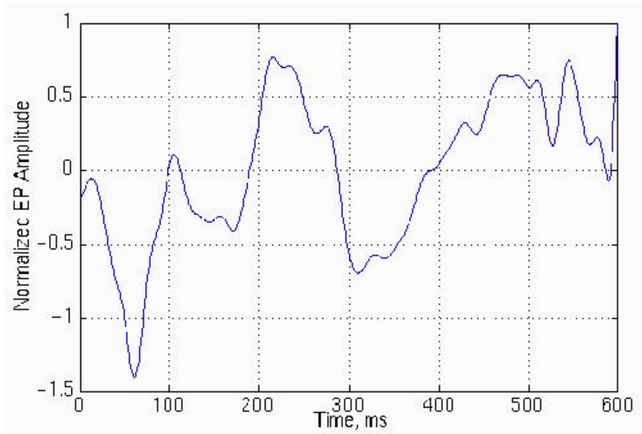
که در آن a یک پارامتر مدولاسیون و σ پارامتر مقیاس است که روی عرض پنجره اثر دارد.

۳–۳– مثالها

تمام این مثالها مربوط به سیگنال زنده غیرایستا[۷] است. این سیگنالها از پایگاه داده سیگنالهای event related potentials مربوط به افراد عادی و بیماران مبتلا به آلزایمر اقتباس شده است. از آنجا که این سیگنالها، سیگنالهای سینوسی عادی نیستند، شرح آنها کار ساده‌ای نیست. این سیگنالها فقط برای داشتن ایده‌ای در مورد CWTهای زنده ارائه شده‌اند.

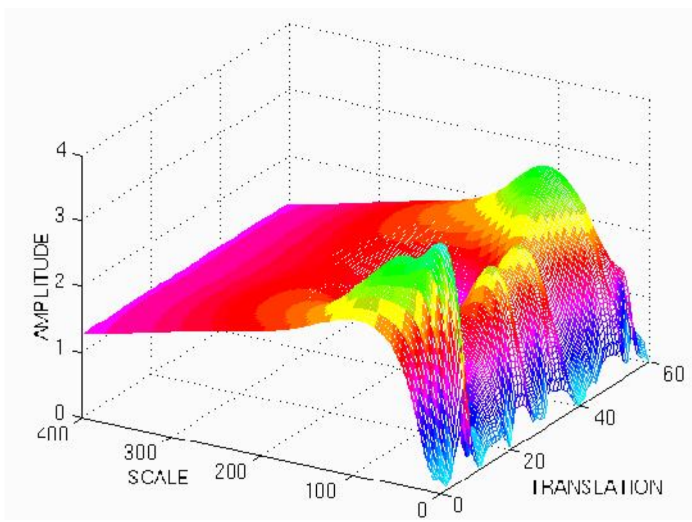
سیگنال شکل(۲۱) متعلق به یک فرد عادی است.

[7] Non-stationary



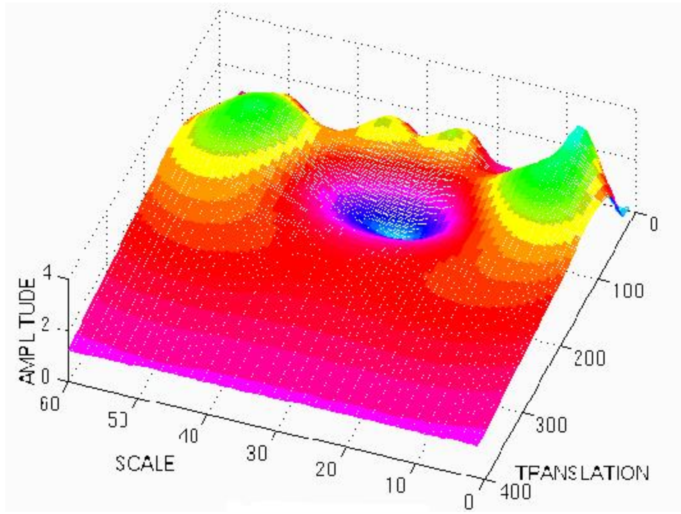
شکل ۲۱- سیگنال مربوط به یک فرد عادی

شکل (۲۲) تبدیل موجک پیوسته این سیگنال را نشان می‌دهد. اعداد روی محورها برای ما اهمیتی ندارند، این اعداد فقط نشان دهنده این هستند که CWT در تبدیل ۳۵۰ و مکانهای مقیاس ۶۰ بر روی صفحه‌ی تبدیل-مقیاس محاسبه شده است. نکته مهمی که باید به آن توجه شود اینست که همانطور که در مورد محاسبات در تعداد مکانهای محدود مشخص است، محاسبات، یک WT پیوسته واقعی را نشان نمی‌دهند. این فقط یک نسخه گسسته از CWT است که بعداً توضیح داده خواهد شد. توجه کنید که این مورد یک تبدیل موجک گسسته (DWT) نیست.



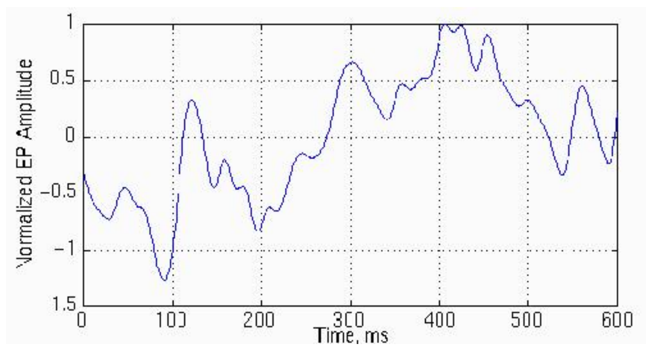
شکل ۲۲- تبدیل موجک پیوسته سیگنال شکل (۲۱)

شکل (۲۳) همان شکل (۲۲) است که برای دید بهتر از زاویه دیگر نشان داده شده است.



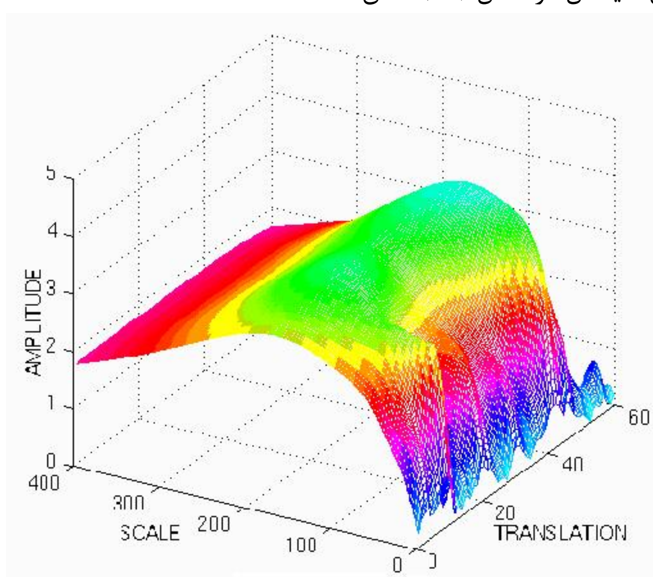
شکل ۲۳- تبدیل شکل (۲۲) از زاویه‌ای دیگر

شکل (۲۴) سیگنال مربوط به یک بیمار مبتلا به آلزایمر است.



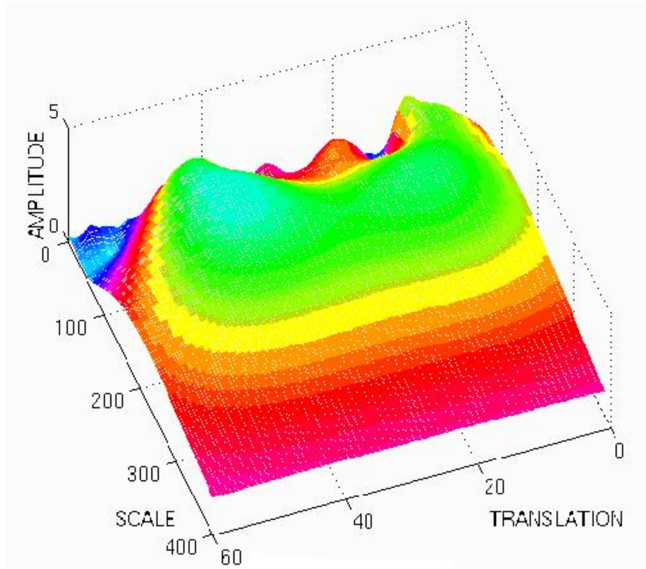
شکل ۲۴- سیگنال مربوط به یک فرد مبتلا به آلزیمر

تبدیل موجک پیوسته این سیگنال در شکل (۲۵) نشان داده شده است.



شکل ۲۵- تبدیل موجک پیوسته سیگنال شکل (۲۴)

شکل (۲۶) همان شکل (۲۵) است که برای دید بهتر از زاویه دیگر نشان داده شده است.



شکل ۲۶- تبدیل شکل (۲۵) از زاویه‌ای دیگر

۳-۴- ترکیب ویولت

تبدیل ویولت پیوسته در صورتیکه شرایط رابطه (۲۵) برقرار باشد، حتی اگر توابع پایه orthonormal نباشند، یک تبدیل برگشت پذیر است. خوشبختانه این شرایط محدود کننده نیستند. تبدیل موجک معکوس با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

(۲۴) تبدیل موجک معکوس
$$x(t)=\frac{1}{c_{\psi}^{2}}\int_{s}\int_{\tau}\Psi_{x}^{\psi}(\tau,s)\frac{1}{s^{2}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)d\tau\, ds$$

که در آن c_{ψ} ثابتی است که بستگی به موجکی که استفاده می‌شود دارد. عملیات معکوس اینست که ثابت مقبولیت، شرط مقبولیت زیر را دارا باشد:

(۲۵) شرط مقبولیت
$$c_{\psi}=\left\{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^{2}}{|\xi|}d\xi\right\}^{1/2}<\infty$$

که در آن $\hat{\psi}(\xi)$ تبدیل فوریه $\psi(t)$ است.رابطه (۲۵) ایجاب می‌کند که $\hat{\psi}(0)=0$ باشد، یعنی:

(۲۶)
$$\int\psi(t)dt=0$$

همانطور که می‌بینید، رابطه (۲۶) یک رابطه محدود کننده نیست و انتگرال بسیاری از توابع موجک صفر است. برای برقراری رابطه (۲۶)، موجک باید نوسانی باشد.

۳-۵- گسسته کردن تبدیل موجک پیوسته: سریهای موجک

امروزه برای بسیاری از محاسبات از کامپیوترها استفاده می‌شود. واضح است که نه FT، نه STFT و نه CWT نمی‌توانند در عمل با استفاده از معادلات تحلیلی و انتگرالها و غیره محاسبه شوند و لازم است که تبدیل گسسته شود. مانند FT و STFT بدیهی‌ترین راه‌حل انجام این کار نمونه برداری از صفحه‌ی زمان-فرکانس با نرخ نمونه‌برداری یکنواخت است. بنابراین، در مورد WT، می‌توان از تغییرات مقیاس برای کاهش نرخ نمونه‌برداری استفاده کرد.

در مقیاسهای بالاتر (فرکانسهای پایینتر) نرخ نمونه‌برداری می‌تواند بنا به قانون نایکویست[۸] کاهش یابد. به بیان دیگر، اگر بخواهیم از صفحه‌ی زمان در مقیاس s_1 با نرخ N_1 نمونه‌برداری کنیم، این صفحه می‌تواند در مقیاس s_2 با نرخ N_2 نمونه‌برداری شود، در صورتیکه داشته باشیم $s_1 < s_2$ (متناظر با $f_1 > f_2$) و $N_2 < N_1$. رابطه واقعی بین N_1 و N_2 به این شکل است:

$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1 \qquad (۲۷)$$

یا

$$N_2 = \frac{f_2}{f_1} N_1 \qquad (۲۸)$$

یعنی در فرکانسهای پایینتر نرخ نمونه‌برداری می‌تواند کاهش یابد، که در اینصورت به میزان قابل توجهی در زمان محاسبات صرفه جویی می‌شود.

در این مرحله باید توجه کنیم که گسسته‌سازی می‌تواند به هر طریقی بدون هیچ محدودیتی انجام شود. اگر ترکیب لازم نباشد، نیازی نیست معیار نایکویست نیز رعایت شود. محدودیتهای گسسته‌سازی و نمونه‌برداری فقط در مواقعی که بازسازی مجدد مورد نظر باشد، مهم است. نرخ نمونه‌برداری نایکویست حداقل نرخ نمونه‌برداریی است که اجازه می‌دهد سیگنال زمانی پیوسته از نمونه‌های گسسته‌اش دوباره بازسازی شود. بردارهای پایه‌ای که قبلاً به آنها اشاره شد، برای این منظور از اهمیت بخصوصی برخوردار هستند.

همانطور که قبلاً گفتیم می‌توان در صورتیکه موجک (s,τ) شرط رابطه (۲۵) را داشته باشد، معکوس آنرا از رابطه (۲۴) محاسبه کنیم. هر چند این امر برای تبدیل پیوسته نیز درست است. سوال اینست که آیا می‌توان سیگنال را در صورتیکه پارامترهای مقیاس و زمان آن گسسته شده باشند، دوباره ساخت؟ پاسخ اینست که تحت شرایط خاصی این امر امکان پذیر است.

ابتدا پارامتر مقیاس s روی یک شبکه لگاریتمی گسسته می‌شود. سپس پارامتر زمان بر طبق پارامتر مقیاس گسسته خواهد شد، یعنی برای هر مقیاس یک نرخ نمونه‌برداری متفاوت انتخاب می‌شود. به بیان دیگر نمونه‌برداری روی یک شبکه دوتایی که در شکل (۲۷) نشان داده شده است، صورت می‌گیرد.

---

[8] Nyquist

شکل ۲۷- شکل نمونه‌برداری

ناحیه‌ای را که توسط دو محور بعنوان کل صفحه زمان-مقیاس محدود شده را در نظر بگیرید. CWT به هر یک از نقاط این صفحه یک مقدار را نسبت می‌دهد. بنابراین تعداد نامحدودی ضرایب CWT خواهیم داشت.

ابتدا گسسته‌سازی محور مقیاس را بررسی می‌کنیم. از میان تعداد نقاط نامحدود، فقط تعداد محدودی با استفاده از یک قانون لگاریتمی انتخاب می‌شوند. به دلیل همگرایی، معمولترین مبنا برای لگاریتم ۲ است. اگر ۲ انتخاب شود، فقط مقیاسهای ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴ و ... محاسبه می‌شوند. اگر مبنا ۳ بود، مقیاسهای ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و ... را خواهیم داشت. بعد از این مرحله محور زمان بر طبق محور مقیاس گسسته می‌شود. از آنجا که مقیاسهای گسسته با فاکتور ۲ تغییر می‌کنند، نرخ نمونه‌برداری محور زمان نیز برای هر مقیاس با فاکتور ۲ کاهش می‌یابد.

توجه کنید که در پایینترین مقیاس (s=2)، فقط از ۳۲ نقطه محور زمان نمونه‌برداری می‌شود (برای مورد بخصوصی که در شکل (۲۷) نشان داده شده است). در مقیاس بعدی، s=4، از آنجا که نرخ نمونه‌برداری محور مقیاس با فاکتور ۲ افزایش می‌یابد، در محور زمان نرخ نمونه برداری با فاکتور ۲ کاهش خواهد یافت و فقط ۱۶ نمونه گرفته می‌شود.

اگرچه این صفحه زمان-مقیاس خوانده می‌شود، درستتر اینست که به آن انتقال-مقیاس بگوییم، زیرا زمان در فضای تبدیل در واقع دلالت بر انتقال موجک در طول زمان را دارد. برای سریهای موجک، زمان واقعی هنوز پیوسته است.

مانند ارتباط بین تبدیل فوریه پیوسته و سریهای فوریه و تبدیل فوریه گسسته، در اینجا نیز یک تبدیل موجک پیوسته، یک سری موجک و یک تبدیل موجک گسسته داریم.

برای بیان روند گسسته‌سازی فوق به زبان ریاضی، مقیاس گسسته به شکل $s = s_0^j$ و انتقال گسسته بصورت ${}^{2} = k.s_0^j.{}^{2}{}_0$ خواهد بود، که در آن $1 < s_0$ و ${}^{2}{}_0 > 0$ است. توجه کنید که گسسته‌سازی انتقال به چه شکل به مقیاس با s_0 وابسته است.

تابع موجک پیوسته

$$\cdot_{{}^{2},s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \left(\frac{t - {}^{2}}{s} \right) \qquad (۲۹)$$

$$\cdot_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \cdot (s_0^{-j}t - k{}^2{}_0) \qquad (۳۰)$$

که در آن $s = s_0^j$ و $^2 = k.s_0^j.{}^2{}_0$.

اگر $\{\cdot_{j,k}\}$ یک پایه orthonormal را تشکیل دهند، تبدیل سری موجک به این صورت خواهد بود:

$$\boldsymbol{\psi}_x^{\cdot}\, j,k = \int x(t) \cdot^{*}_{j,k}(t)dt \qquad (۳۱)$$

یا

$$x(t) = c_{\cdot} \sum_j \sum_k \boldsymbol{\psi}_x^{\cdot}\, j,k \;\cdot_{j,k}(t) \qquad (۳۲)$$

در سری موجک، $\{\cdot_{j,k}\}$ باید orthonormal، biorthogonal و یا frame باشند. اگر $\{\cdot_{j,k}\}$، orthonormal نباشد، رابطه (۳۱) تبدیل می شود به:

$$\boldsymbol{\psi}_x^{\cdot}\, j,k = \int x(t) \hat{\cdot}^{*}_{j,k}(t)dt \qquad (۳۳)$$

که در آن $\hat{\cdot}^{*}_{j,k}(t)$، پایه dual biorthogonal یا dual frame می‌باشد (توجه کنید که * نشان دهنده مزدوج است).

اگر $\cdot_{j,k}$، orthonormal یا biorthogonal باشند، تبدیل بدون تکرار خواهد بود، در مقابل اگر از نوع frame باشند، تکرار خواهیم داشت. از طرف دیگر، یافتن frame ها از یافتن توابع پایه orthonormal یا biorthogonal ساده‌تر است. مقایسه زیر این مفهوم را روشنتر می‌کند. تمام مراحل را در مورد نگاه کردن به یک شئ خاص در نظر بگیرید. چشم انسان ابتدا یک دید کلی را بسته به فاصله چشم از شئ تعیین می‌کند. این کار مطابق با تنظیم پارامتر مقیاس s_0^{-j} است. وقتی که به شئ نزدیکی با جزئیات زیاد نگاه می‌کنیم، j منفی و بزرگ است (مقیاس پائین، فرکانس بالا، جزئیات بیشتری را در سیگنال بدست می‌آورد). با حرکت آهسته سر (یا چشمها) و با افزایش بسیار کم (در زاویه، در مسافت، بسته به شئی که دیده می‌شود)، تغییرات کمی در مقدار $^2 = k.s_0^j.{}^2{}_0$ بوجود می‌آید. توجه کنید که وقتی j منفی و بزرگ است، معادل است با تغییرات کمی در زمان، ^{2}، (نرخ نمونه برداری بالا) و تغییرات زیادی در s_0^{-j} (مقیاس پائین، فرکانسهای بالا و نرخ نمونه‌برداری بالا). پارامتر مقیاس می‌تواند به عنوان بزرگ‌نمایی نیز در نظر گرفته شود.

نرخ نمونه‌برداری تا چه حد می‌تواند کاهش یابد در حالیکه امکان بازسازی مجدد هنوز وجود داشته باشد؟ این اصلی‌ترین سوالی است که برای بهینه‌سازی فرآیند باید به آن پاسخ داده شود. مناسبترین مقدار (از دیدگاه برنامه‌نویسی) برای s_0، ۲ و برای ^{2} 1 می‌باشد. بدیهی است که وقتی نرخ نمونه‌برداری باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، تعداد موجکهای orthonormal نیز کاهش می‌یابد.

مثالهای تبدیل موجک پیوسته که در این بخش آورده شد، در واقع سریهای موجک سیگنالهای مورد نظر بودند و پارامترها بسته به سیگنال خاص انتخاب شده بودند. از آنجا که نیازی به ساخت مجدد سیگنال نبود، نرخ نمونه‌برداری در برخی موارد بسیار زیر معیار انتخاب شده است، بعنوان مثال برای مثالهای مختلف، s_0 از ۲ به ۱۰ و $^2{}_0$ از ۲ به ۸ تغییر کرده است.

۳–۶– تبدیل موجک گسسته

۳–۶–۱– چرا تبدیل موجک گسسته مورد نیاز است؟

گسسته کردن تبدیل موجک پیوسته امکان محاسبه آن را با کامپیوتر فراهم می‌کند، اما این یک تبدیل گسسته صحیح نیست. حقیقت امر اینست که سریهای موجک در واقع یک نسخه نمونه‌برداری شده از CWT هستند، و اطلاعاتی که بخصوص در مواقعی که ساخت مجدد سیگنال مد نظر است، ارائه می‌دهند، به شدت تکراری است. این تکرار، از طرف دیگر، به زمان محاسبات و منابع قابل توجهی نیاز دارد. تبدیل موجک گسسته (DWT) اطلاعات کافی و مناسبی را هم در مورد تجزیه و هم ترکیب سیگنال اصلی، با درصد کاهش قابل توجهی در زمان محاسبات، ارائه می‌دهد.

پیاده سازی DWT در مقایسه با CWT بسیار ساده‌تر است. مفاهیم پایه DWT و خصوصیات و الگوریتمهایی که برای محاسبه آن استفاده می‌شوند، در این بخش شرح داده شده‌اند و برای کمک به بیان DWT مثالهایی آورده شده است.

۳–۶–۲– تبدیل موجک گسسته (DWT)

پیدایش DWT برمی گردد به سال ۱۹۷۶ وقتیکه Croiser، Esteban و Galand تکنیکی برای تجزیه سیگنالهای زمانی گسسته اختراع کردند. Crochiere، Weber و Flanagan کار مشابهی را در مورد کد کردن سیگنالهای گفتار در همان سال انجام دادند. آنها الگوی تجزیه خود راکدگذاری subband نام نهادند. لیکن در سال ۱۹۸۳ تکنیکی بسیار مشابه کدگذاری subband با نام کدگذاری هرمی تعریف شد که به عنوان تجزیه چندمقیاسی[9] نیز شناخته می‌شود. بعدها در سال ۱۹۸۹، Vetterli و Le Gall یک سری بهبودهایی را در الگوی کدگذاری subband بوجود آوردند که تکرارهای موجود در الگوی کدگذاری هرمی را از بین می‌برد. در ادامه روش کدگذاری subband را شرح می‌دهیم. در مورد تبدیل موجک گسسته و تئوری تجزیه چندمقیاسی می‌توانید اطلاعات بیشتر را از مقالات و کتابهایی که با این عنوان وجود دارند، استفاده کنید.

۳–۶–۳– کدگذاری subband و تجزیه چندمقیاسی

ایده اصلی مانند CWT است. یک نمایش زمان-مقیاس از سیگنال دیجیتال با استفاده از تکنیکهای فیلترینگ دیجیتال بدست می‌آید. بخاطر بیاورید که CWT با تغییر مقیاس پنجره تجزیه، تغییر مکان پنجره در زمان، ضرب آن در سیگنال و انتگرالگیری در تمام زمانها، محاسبه می‌شد. در مورد گسسته، فیلترهایی از فرکانسهای قطع مختلف برای تجزیه سیگنال در مقیاسهای متفاوت استفاده می‌شوند. سیگنال از یک سری فیلترهای بالاگذر، برای تجزیه فرکانسهای بالا و از یک سری فیلترهای پائین‌گذر، برای تجزیه فرکانسهای پائین عبور داده می‌شود.

درجه تفکیک‌پذیری سیگنال، که مقیاسی برای میزان جزئیات موجود در سیگنال است، با عملیات فیلترینگ و مقیاس با عملیات upsampling و downsampling (subsampling) تغییر می‌کند. subsampling یک سیگنال، برابر است با کاهش نرخ نمونه‌برداری یا حذف برخی نمونه‌ها از سیگنال. به عنوان مثال، subsampling با ۲ یعنی حذف بقیه نمونه‌های سیگنال. subsampling با یک فاکتور n تعداد نمونه‌ها در سیگنال را n بار کاهش می‌دهد.

---

[9]Multiresolution

upsampling یک سیگنال، با افزایش نرخ نمونه‌برداری یک سیگنال با اضافه کردن نمونه‌های جدید به آن، مطابق است. بعنوان مثال، upsampling با دو یعنی اضافه کردن یک نمونه جدید (که معمولاً صفر یا یک مقدار درونیابی‌شده است)، بین هر دو نمونه از سیگنال. upsampling از یک سیگنال با فاکتور n، تعداد نمونه‌ها را n برابر می‌کند.

اگر چه این تنها انتخاب ممکن نیست، اما ضرایب DWT معمولاً روی یک شبکه دوتایی از CWT نمونه‌برداری می‌شوند، یعنی، $s_0 = 2$ و $_0 = 1$ ²، که با استفاده از این مقادیر همانطور که در بخشهای قبل گفته شد، داریم $s = 2j$ و $= k * 2j$ ². از آنجا که سیگنال یک تابع گسسته زمانی است، عبارات تابع و رشته در ادامه بحث ممکن است به جای هم استفاده شوند. این رشته با x[n] بیان می‌شود، که در آن n یک عدد صحیح است.

فرآیند با عبور سیگنال از یک فیلتر پائین‌گذر دیجیتال half band با پاسخ ضربه h[n]، آغاز می‌شود. عملیات فیلترینگ یک سیگنال معادل است با کانولوشن[۱۰] سیگنال با یک پاسخ ضربه از فیلتر. عملیات کانولوشن در زمان گسسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] \qquad (۳۴)$$

یک فیلتر پائین‌گذر half band تمام فرکانسهای بزرگتر از نصف بالاترین فرکانس را حذف می‌کند. بعنوان مثال، اگر یک سیگنال دارای حداکثر ۱۰۰۰ هرتز باشد، سپس فیلتر پائین‌گذر half band تمام فرکانسهای بالای ۵۰۰ هرتز را حذف می‌کند.

واحد فرکانس در این مورد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در سیگنالهای گسسته، فرکانس بر حسب رادیان بیان می‌شود. در نتیجه، فرکانس نمونه‌برداری سیگنال برابر 2® رادیان بر حسب فرکانس رادیان خواهد بود. بنابراین، جز با فرکانس حداکثر اگر سیگنال با نرخ نایکویست (که دو برابر فرکانس حداکثر در سیگنال است) نمونه‌برداری شده باشد، برابر ® رادیان خواهد بود، یعنی نرخ نایکویست برابر ® رادیان بر ثانیه در فضای فرکانس گسسته است. از این رو استفاده از هرتز برای سیگنالهای گسسته مناسب نیست. از آنجا که استفاده از هرتز بسیار معمول است، در مواردی که نیاز باشد مساله‌ای را شرح دهیم، از آن استفاده می‌کنیم. بنابراین، بخاطر داشته باشید که واحد فرکانس در سیگنالهای گسسته زمانی رادیان است.

بعد از این مرحله نیمی از نمونه‌ها بر طبق قانون نایکویست حذف شده‌اند و سیگنال دارای بالاترین فرکانس $® / 2$ رادیان به جای ® رادیان است. حذف هر نمونه دیگر سیگنال را با فاکتور دو subsample می‌کند، و سیگنال نیمی از نقاط خود را خواهد داشت. مقیاس سیگنال در حال حاضر دو برابر شده است. توجه کنید که فیلترهای پائین‌گذر اطلاعات فرکانسهای بالا را حذف می‌کنند اما مقیاس را تغییر نمی‌دهند. فقط فرآیند subsampling مقیاس را تغییر می‌دهد. رزولوشن، از طرف دیگر، بستگی به میزان اطلاعات در سیگنال دارد، و بنابراین تحت تاثیر عملیات فیلترینگ قرار می‌گیرد. فیلترهای پائین‌گذر half band نیمی از فرکانسها را حذف می‌کنند که می‌توان آنرا بصورت از دست دادن نیمی از اطلاعات تعبیر کرد. بنابراین درجه تفکیک‌پذیری بعد از عملیات فیلترینگ نصف می‌شود. توجه کنید که عملیات subsampling روی رزولوشن تاثیر نمی‌گذارد، زیرا در هر صورت حذف نیمی از اجزا فرکانسی سیگنال، تعداد تکرار نمونه‌ها را نصف می‌کند. نصف نمونه‌ها بدون از دست رفتن اطلاعات می‌توانند حذف شوند. بطور خلاصه،

[10] Convolution

فیلتر پائین‌گذر رزولوشن را نصف می‌کند اما مقیاس را بدون تغییر می‌گذارد. سیگنال سپس با فاکتور دو subsample می‌شود زیرا نیمی از نمونه‌ها تکراری هستند. این امر مقیاس را دو برابر می‌کند.

این فرآیند می تواند به زبان ریاضی به این شکل نشان داده شود:

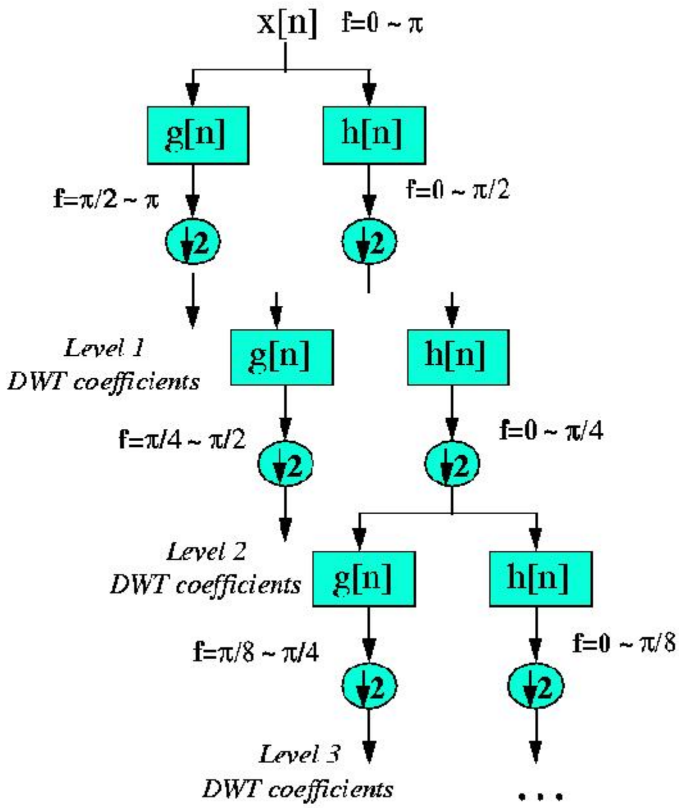
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[2n-k] \qquad (۳۵)$$

حال طریقه دقیق محاسبه DWT را بررسی می‌کنی.DWT سیگنال را در فرکانسهای مختلف با رزولوشنهای متفاوت با تجزیه سیگنال به تقریب (approximation) کلی و اطلاعات جزئیات (detail)، تحلیل می‌کند. DWT دو مجموعه تابع را استفاده می‌کند، توابع مقیاس و توابع موجک، که به ترتیب مربوط به فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر هستند. تجزیه سیگنال به باندهای فرکانسی مختلف بسادگی با فیلترینگ بالاگذر و پایین‌گذر پی‌درپی سیگنال در بعد زمان انجام می‌شود. سیگنال اصلی، x[n]، ابتدا از یک فیلتر بالاگذر half band، g[n]، و یک فیلتر پایین‌گذر، h[n]، عبور داده می‌شود. بعد از عملیات فیلترینگ نیمی از نمونه ها بر طبق قانون نایکویست می‌توانند حذف شوند، زیرا سیگنال در این مرحله دارای حداکثر فرکانس $2/$® به جای ®است. از این رو سیگنال می‌تواند با فاکتور دو subsample شود. این یک سطح از تجزیه را نشان می‌دهد و بصورت ریاضی می‌توان آن را به این شکل نمایش داد:

$$y_{high}[k] = \sum_{n} x[n].g[2k-n] \qquad (۳۶)$$

$$y_{low}[k] = \sum_{n} x[n].h[2k-n] \qquad (۳۷)$$

که در آن $y_{high}[k]$ و $y_{low}[k]$ به ترتیب خروجی فیلترهای بالاگذر و پایین گذر بعد از subsamplingدو هستند. این تجزیه، رزولوشن زمانی را نصف می‌کند زیرا فقط نیمی از نمونه‌ها کل سیگنال را مشخص می‌کنند. اگرچه این عملیات رزولوشن فرکانسی را دو برابر می‌کند، زیرا باند فرکانسی در حال حاضر فقط نیمی از باند فرکانسی قبلی را پوشانده است، ولی بطور موثر ابهام را در فرکانس نصف می‌کند. روند فوق که بعنوان کدگذاری subband نیز شناخته می‌شود، برای تجزیه بیشتر می‌تواند تکرار شود. در هر سطح، فیلترینگ و subsampling نصف تعداد نمونه‌ها (و از این رو نصف رزولوشن زمانی) و نصف باند فرکانس (و از این جهت دو برابر رزولوشن فرکانسی) را نتیجه می‌دهد. شکل (۲۸) این روند را شرح می‌دهد، که در آن x[n] سیگنال اصلی برای تجزیه، و h[n] و g[n] به ترتیب فیلترهای بالا و پایین‌گذر هستند. پهنای باند سیگنال در هر سطح در شکل با f مشخص شده است.



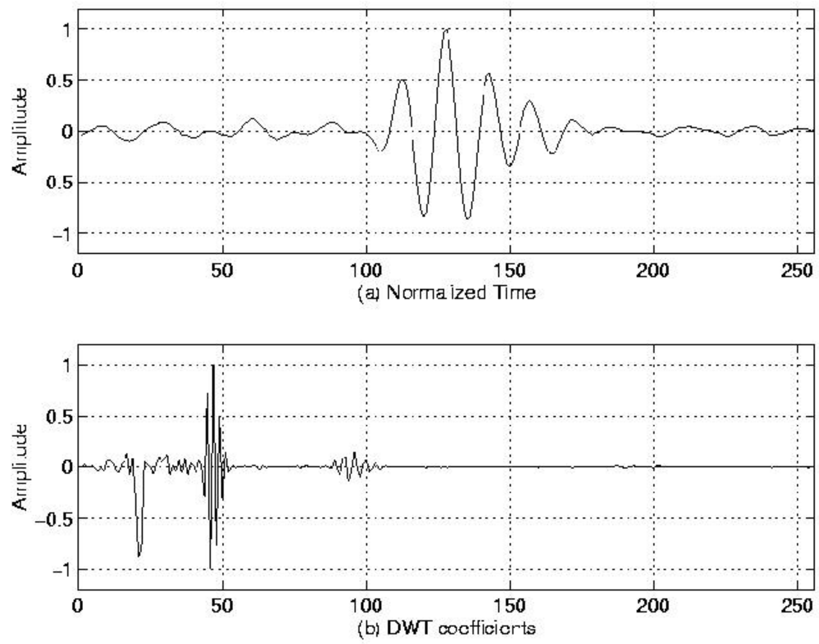
شکل ۲۸- انجام DWT به کمک فیلترهای h[n] و g[n]

بعنوان مثال، فرض کنید سیگنال اولیه x[n]، ۵۱۲ نقطه نمونه داشته باشد، که در یک باند فرکانسی از صفر تا ®رایان بر ثانیه قرار دارند. در اولین سطح تجزیه، سیگنال از فیلترهای بالا و پایین گذر عبور داده می‌شود و سپس عملیات subsampling انجام می‌گیرد. خروجی فیلتر بالاگذر ۲۵۶ نقطه (بنابراین نصف رزولوشن زمانی)، را در برمی‌گیرد اما فقط فرکانسهای 2 / ® تا ®را شامل می‌شود (دو برابر کردن رزولوشن فرکانسی). این ۲۵۶ نمونه ضرایب اولین سطح DWT را شامل است. خروجی فیلتر پایین‌گذر هم ۲۵۶ نمونه است ولی اینبار نیمه پایین باند فرکانسی از صفر تا 2 / ®رادیان بر ثانیه را در بر می‌گیرد. این سیگنال سپس برای تجزیه بیشتر از همین فیلترهای بالا و پایین‌گذر عبور داده می‌شود. خروجی فیلتر پایین‌گذر دوم که بعد از آن subsampling انجام شده، ۱۲۸ نمونه در باند فرکانسی صفر تا 4 / ®رادیان بر ثانیه، و خروجی فیلتر بالاگذر که بعد از آن subsampling انجام شده، ۱۲۸ نمونه در باند فرکانسی 4 / ® تا 2 / ® رادیان بر ثانیه خواهد بود. سیگنال خروجی دومین فیلتر بالاگذر ضرایب DWT سطح دو را تشکیل می‌دهد. این سیگنال نسبت به سیگنال مرحله اول نصف رزولوشن زمانی اما دو برابر رزولوشن فرکانسی را دارد. به بیان دیگر، به نسبت سیگنال اصلی، رزولوشن زمانی با فاکتور ۴ کاهش یافته و رزولوشن فرکانسی با فاکتور ۴ افزایش یافته است. سپس خروجی فیلتر پایین‌گذر برای تجزیه بیشتر دوباره فیلتر می‌شود. این روند تا زمانی که دو نمونه باقی بماند ادامه می‌یابد. برای این مثال خاص هشت سطح تجزیه خواهیم داشت، که هر یک نصف نمونه‌های مرحله

قبل را دارند. DWT سیگنال اصلی با ترکیب تمام ضرایب با شروع از آخرین سطح تجزیه، بدست می‌آید (در این مورد دو نمونه باقی می‌ماند). سپس DWT برابر سیگنال اصلی ضریب خواهد داشت.

فرکانسهایی که در سیگنال اصلی برجسته‌تر هستند بصورت نوسانهای بزرگ در ناحیه‌ای از سیگنال DWT که شامل آن فرکانسهای خاص است، ظاهر می‌شوند. تفاوت این تبدیل با تبدیل فوریه اینست که اطلاعات زمانی این فرکانسها از دست نمی‌رود. محلی کردن زمان دارای رزولوشنی است که بستگی به سطحی دارد که این فرکانسها در آن ظاهر شده‌اند. اگر اطلاعات اصلی سیگنال در فرکانسهای بالا قرار گرفته باشد، آنچه که رخ می‌دهد، محلی‌سازی زمانی این فرکانسها دقیقتر صورت می‌گیرد، از این رو این فرکانسها با تعداد نمونه های بیشتری مشخص می‌شوند. ولی اگر اطلاعات اصلی فقط در فرکانسهای پایین قرار گرفته باشد، محلی سازی زمانی خیلی دقیق نخواهد بود و تعداد نمونه کمی برای بیان سیگنال در این فرکانسها استفاده خواهد شد. در نتیجه این فرآیند رزولوشن زمانی خوبی را برای فرکانسهای بالا و رزولوشن فرکانسی خوبی را برای فرکانسهای پایین ارائه می‌دهد. بیشتر سیگنالهایی که در عمل با آنها مواجه هستیم از این نوع هستند.

باندهای فرکانسی که در سیگنال اصلی خیلی برجسته نیستند، دامنه خیلی کمی دارند، و آن قسمت از DWT بدون هیچ اتلاف اطلاعات اصلیی می‌تواند حذف شود، که این امر امکان کاهش داده‌ها را می‌دهد. شکل (۲۹) در قالب یک مثال شرح می دهد که سیگنالهای DWT به چه شکلند و کاهش داده به چه شکل انجام می شود. شکل (۲۹) بالا، یک سیگنال نوعی را با ۵۱۲ نمونه نشان می دهد که بعد دامنه آن نرمالایز شده است. محور افقی تعداد نمونه‌ها و محور عمودی دامنه نرمالایز شده، را نشان می‌دهد. شکل (۲۹) پایین نیز ۸ سطح DWT سیگنال شکل (۲۹) بالا را نشان می‌دهد. ۲۵۶ نمونه آخر در این سیگنال معادل باند فرکانسی حداکثر سیگنال و ۱۲۸ نمونه قبلی برابر باند فرکانسی حداکثر در سطح دوم و همینطور الی آخر می‌باشد. باید توجه کنید که فقط ۶۴ نمونه اول که معادل پایینترین فرکانسها در تجزیه هستند، اطلاعات مناسب را در بر دارند، و بقیه سیگنال در واقع اطلاعاتی ندارد. بنابراین، همه بجز ۶۴ تای اول بدون اتلاف اطلاعات می‌توانند حذف شوند. این روند ارائه یک الگوی کاهش داده موثر توسط DWT است.



شکل ۲۹- سیگنالهای DWT و فرایند کاهش داده

در ادامه تحلیل ریاضی DWT را به پایان می‌رسانیم و سپس دوباره این مثال را بررسی خواهیم کرد.

یک خصیصه مهم DWT رابطه بین پاسخ ضربه و فیلترهای بالا و پایین‌گذر است. فیلترهای بالا و پایین‌گذر از یکدیگر مستقل نیستند و رابطه زیر را با هم دارند:

$$g[L-1-n]=(-1)^n.h[n] \qquad (۳۸)$$

که در آن g[n] فیلتر بالاگذر و h[n] فیلتر پایین‌گذر و L طول فیلتر (تعداد نقاط) است. توجه کنید که دو فیلتر نسخه‌های معکوس یکدیگر هستند که بصورت یک در میان در اندیسهای فرد قرینه شده‌اند. فیلترهایی که این شرط را داشته باشند در پردازش سیگنال بطور معمول استفاده می‌شوند و با نام Quadrature Mirror Filters (QMF) شناخته می‌شوند. دو عملیات فیلترینگ و subsampling می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$y_{high}[k]=\sum_n x[n].g[-n+2k] \qquad (۳۹)$$

$$y_{low}[k]=\sum_n x[n].h[-n+2k] \qquad (۴۰)$$

بازسازی در این مورد بسیار ساده است چرا که فیلترهای half band پایه orthonormal را تشکیل می‌دهند. برای بازسازی سیگنال اولیه کافیست فرآیند فوق را معکوس کنیم. سیگنال در هر سطح با فاکتور دو upsample می‌شود، از فیلترهای ترکیبی g'[n] و h'[n] (به ترتیب بالاگذر و پایین‌گذر) عبور داده می‌شود و سپس جمع صورت می‌گیرد. مساله قابل توجه اینکه فیلترهای تجزیه و ترکیب بجز در مورد معکوس زمانی با هم برابرند. بنابراین فرمول بازسازی برای هر سطح برابر است با:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(y_{high}[k].g[-n+2k]\right)+\left(y_{low}[k].h[-n+2k]\right) \qquad (۴۱)$$

اما اگر فیلترها half band ایده‌آل نبودند، ساخت مجدد کاملاً نمی‌توانست صورت بگیرد. اگرچه تحقق فیلترهای ایده‌آل ممکن نیست، اما تحت شرایط خاصی می‌توان فیلترهایی پیدا کرد که بازسازی کامل را امکان پذیر کنند. معروفترین آنها موجکDaubecheis است که توسط Ingrid Daubecheis معرفی شد.

توجه کنید که برای اینکه بتوان عملیات subsampling با فاکتور ۲ را انجام داد، باید طول سیگنال توانی از ۲ و یا حداقل ضریبی از توانی از ۲ باشد. طول سیگنال تعداد سطوح تجزیه را مشخص می‌کند. بعنوان مثال، اگر طول سیگنال ۱۰۲۴ باشد، ۱۰ سطح تجزیه خواهیم داشت.

تفسیر ضرایب DWT در برخی موارد نسبتاً دشوار است چرا که روشی که ضرایب DWT ارائه می‌شوند، نسبتاً عجیب است. برای اینکه یک داستان طولانی را کوتاه کنیم، ضرایب DWT در هر سطح با شروع از سطح آخر به هم الحاق می‌شوند. برای روشن شدن این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید یک سیگنال با طول ۲۵۶ نمونه و فرکانس نمونه‌برداری ۱۰ مگاهرتز داریم و می‌خواهیم ضرایب DWT آن را محاسبه کنیم. از آنجا که فرکانس نمونه برداری ۱۰ مگاهرتز است بزرگترین فرکانسی که در سیگنال وجود دارد، ۵ مگاهرتز می‌باشد. در سطح اول سیگنال از یک فیلتر پایین‌گذر h[n] و یک فیلتر بالاگذر g[n] عبور داده شده و خروجی آنها با فاکتور ۲ subsample می‌شود. خروجی فیلتر بالاگذر ضرایب DWT سطح اول را تشکیل می‌دهد. تعداد آنها ۱۲۸ تاست و سیگنال را در محدوده [2.5 5] نشان می‌دهند. این ۱۲۸ نمونه آخرین نمونه‌هایی هستند که رسم می‌شوند. خروجی فیلتر پایین‌گذر، که ۱۲۸ نمونه دارد، فرکانسهای [0 2.5] را در برمی‌گیرد و در ادامه برای تجزیه به h[n] و g[n] فرستاده می‌شوند. خروجی فیلتر بالاگذر دوم ضرایب سطح ۲ DWT را تشکیل می‌دهند و این ۶۴ نمونه قبل از ۱۲۸ نمونه سطح یک در نمودار آورده می‌شوند. خروجی فیلتر پایین‌گذر سطح دو دوباره تجزیه می‌شود. خروجی فیلتر بالاگذر سوم ضرایب سطح ۳ DWT را تشکیل می‌دهند. این ۳۲ نمونه قبل از ضرایب DWT سطح دو آورده می‌شوند.

این روند آنقدر ادامه می‌یابد که فقط یک ضریب DWT در سطح ۹ بتوان محاسبه کرد. این ضریب اولین مقداریست که در نمودار رسم می‌شود. در ادامه ۲ ضریب سطح ۸، ۴ ضریب سطح ۷، ۱۶ ضریب سطح ۶ و همینطور تا ۲۵۶ ضریب سطح یک آورده می‌شوند. توجه کنید که تعداد کم و کمتری ضریب در فرکانسهای پایین استفاده می‌شود و در نتیجه رزولوشن زمانی با کاهش فرکانسها، کاهش می‌یابد، اما چون فاصله بین دو فرکانس در فرکانسهای پایین کاهش می‌یابد، رزولوشن فرکانسی افزایش یافته است. بدیهی است که چند ضریب اولیه میزان اطلاعات زیادی را در بر ندارند چرا که رزولوشن زمانی بشدت کاهش یافته است. برای اینکه این نمایش عجیب DWT را بطور کامل شرح دهیم، یک سیگنال واقعی را بررسی می‌کنیم. سیگنال، یک سیگنال ماورا صوت با طول ۲۵۶ نمونه است، که با نرخ ۲۵ مگاهرتز نمونه‌برداری شده است. این سیگنال در اصل با استفاده از مبدل ۲/۲۵ مگاهرتزی ایجاد شده، بنابراین جز طیفی اصلی سیگنال در ۲/۲۵ مگاهرتز قرار دارد. آخرین ۱۲۸ نمونه محدوده [6.25 12.5] را در برمی‌گیرند. همانطور که با استفاده از نمودار می‌توان دید اینجا هیچ اطلاعاتی وجود ندارد، بنابراین این نمونه‌ها را می‌توان بدون هیچ اتلاف اطلاعاتی حذف نمود. ۶۴ نمونه قبلی، سیگنال را در محدوده [3.12 6.25] مگاهرتز نشان می‌دهند که هنوز هیچ اطلاعات مهمی را در بر ندارد. نوسانهای کوچک ممکن است به دلیل نویزهای با فرکانس بالا در سیگنال باشند. ۳۲ نمونه قبل از آن سیگنال را در محدوده [1.5 3.1] مگاهرتز نشان می‌دهند. همانطور که انتظار می‌رود، انرژی اصلی سیگنال در این ۳۲ نمونه متمرکز شده است. ۱۶ نمونه جلوتر هم در محدوده [0.75 1.5] هستند و قله‌هایی که در این سطح دیده می‌شوند فرکانسهای پائینی که سیگنال در بر گرفته، را نشان می‌دهند. نمونه‌های

پیش از این به احتمال زیاد اطلاعات مهمی را حمل نمی‌کنند. بخوبی می‌توان گفت که می‌توانیم فقط تا سطوح سوم یا چهارم پیشروی کنیم و ۲۵۶ نمونه را با 16+32=48 نمونه نمایش دهیم که کاهش بسیار خوبی در داده ارائه می‌دهد.

یکی از بسترهایی که از این خصوصیت تبدیل موجک بیشترین استفاده را می‌کند، پردازش تصویر است. همانطور که احیاناً بخوبی می‌دانید تصاویر، بالاخص تصاویر با درجه تفکیک‌پذیری بالا، فضای زیادی برای ذخیره‌سازی مطالبه می‌کنند. DWT می‌تواند برای کاهش اندازه تصویر بدون کاهش زیاد تفکیک‌پذیری بکار رود. حال ببینید که چگونه این کار صورت می‌گیرد.

برای یک تصویر داده شده، می‌توانید DWT هر سطر را محاسبه کنید و ضرایبی را که از یک آستانه خاص پایینتر هستند، دور بریزید. سپس برای ساخت دوباره سطرهای تصویر اصلی، به سطرها به اندازه ضرایب حذف شده صفر اضافه می‌کنیم و معکوس DWT را اجرا می‌کنیم. همچنین می‌توانیم تصویر را در باندهای فرکانسی مختلف تجزیه کنیم و برای بازسازی تصویر فقط از باندهای خاصی استفاده کنیم.

مساله دیگر که توجهی زیادی را به خود جلب کرده، تجزیه (کدگذاری subband) از هر دو طرف پایین‌گذر و بالاگذر است. یعنی تمرکز بر روی باندهای فرکانس بالا و پایین بطور مجزا. این مساله می‌تواند به این صورت دیده شود که در دو طرف درخت شکل (۲۸) را داشته باشیم. نتیجه چیزی است که بسته‌های موجک نامیده می‌شود. در اینجا این مبحث را باز نمی‌کنیم چون بالاتر از محدوده این بحث است.

۴- مراجع

1. Polikar R.; "The wavelet tutorial"; http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS