سیگنال ها و سیستم ها

درس دوم

حمیدرضا پوررضا

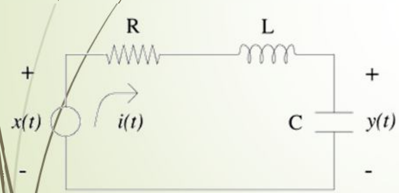
موضوعات این جلسه

- مثال‌هایی از سیستم‌ها
- خصوصیات سیستم‌ها به همراه چند مثال
  - علیت
  - خطی بودن
  - تغییرناپذیری با زمان
  - حافظه‌دار بودن
  - پایداری
  - معکوس‌پذیری

مثال هایی از سیستم ها

$x(t) \longrightarrow$ CT System $\longrightarrow y(t)$ $x[n] \longrightarrow$ DT System $\longrightarrow y[n]$

- مثال 1: مدار RLC



$$\mathrm{R}\; i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dy(t)}{dt}$$

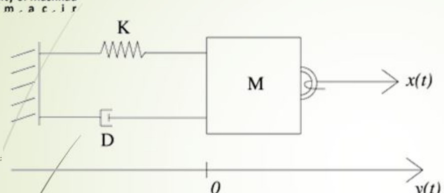
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{LC}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

H.R. POURREZA

مثال هایی از سیستم ها

- مثال 2: سیستم مکانیکی



$x(t)$ - applied force
K - spring constant
D - damping constant
$y(t)$ - displacement from rest

- بالانس نیرو

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - \mathrm{K}y(t) - \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{K}y(t) = x(t)$$

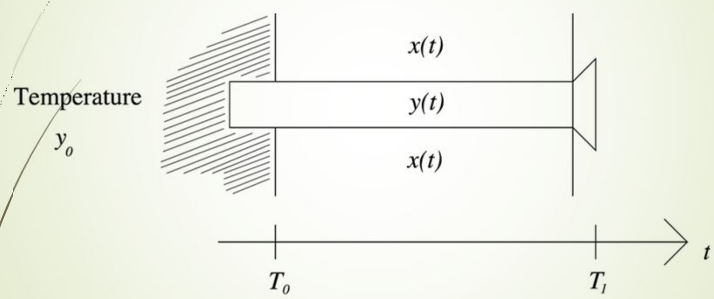
- مشاهدات: سیستم‌های فیزیکی بسیاری می‌توانند به شکل فوق و بصورت ریاضی مدل شوند.

H.R. POURREZA

مثال هایی از سیستم ها

- مثال 3: سیستم حرارتی

صفحه خنک کننده در حالت پایدار



t = distance along rod

$y(t)$ = Fin temperature as function of position

$x(t)$ = Surrounding temperature along the fin

H.R. POURREZA

5

مثال هایی از سیستم ها

- ادامه مثال 3:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= k[y(t) - x(t)] \\
y(T_0) &= y_0 \\
\frac{dy}{dt}(T_1) &= 0
\end{aligned}
$$

- مشاهدات:
  - متغیر مستقل می‌تواند مقداری بجز زمان باشد، مثلا مکان
  - در چنین سیستم‌هایی ممکن است بجای حالت اولیه، شرایط مرزی داشته باشیم

H.R. POURREZA

6

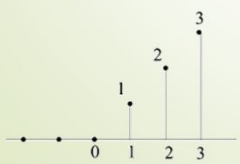
مثال هایی از سیستم ها

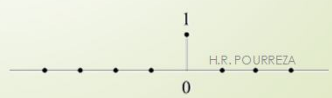
- مثال 4: یک آشکارساز لبه ساده

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\
&= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\
&= \text{“Second difference”}
\end{aligned}
$$

این سیستم تغییر در تغییرات سیگنال را آشکار می‌کند

$$
\begin{array}{lll}
(a) & x[n] = n & \Rightarrow \quad y[n] = 0 \\
(b) & x[n] = nu[n] & \Rightarrow \quad y[n]
\end{array}
$$





H.R. POURREZA

7

مثال هایی از سیستم ها

- مشاهدات:
  - تعدادی زیادی از سیستم‌ها (نه همه) با استفاده از معادلات دیفرانسیل و یا معادلات تفاضلی بیان می‌شوند.
  - چنین معادلاتی، بالذاته، رفتار ورودی/خروجی سیستم را کاملا مشخص نمی‌کنند، بلکه نیاز به حالات کمکی (حالات اولیه، شرایط مرزی)
  - در برخی سیستم‌ها، متغیر مستقل طبیعی زمان است و سیستم‌ها علی هستند، اما این مساله همیشه صادق نیست
  - خیلی از سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند به کمک روابط ریاضی مشابهی بیان شوند

H.R. POURREZA

8

خصوصیات سیستم ها

- علیت، خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان و ...
- چرا؟
  - ملزومات عملی/فیزیکی مهم
  - این خصوصیات ساختار و بینشی را فراهم می‌کند که بتوانیم سیستم‌ها را عمیق‌تر آنالیز و درک کنیم

9

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - علیت (Causality)

- یک سیستم علّی است اگر خروجی نتواند آینده‌ی ورودی را پیش‌بینی کند. یعنی اگر خروجی در هر لحظه تنها وابسته به مقدار ورودی تا آن زمان باشد
- همه سیستم‌های بلادرنگ فیزیکی علّی هستند، زیرا زمان تنها به جلو می‌رود. اثر هر واقعه را بعد از وقوع می‌توان دید (تصور کنید که سیستمی داشته باشید که وابسته به قیمت سهام روز بعد باشد)
- علیت به سیگنال‌های spatially با متغیر مستقل مکان اعمال نمی‌شود (می‌توانیم به چپ و راست و بالا پایین حرکت کنیم).
- علیت به سیستم‌هایی که سیگنال‌های ضبط شده را پردازش می‌کنند اعمال نمی‌شود (رقابت ورزشی ضبط شده در مقابل پخش زنده).

10

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - علیت (Causality)

- از نظر ریاضی (در سیگنال CT): یک سیستم $x(t) \to y(t)$ علّی است اگر:

when	$x_1(t) \to y_1(t)$	$x_2(t) \to y_2(t)$
and	$x_1(t) = x_2(t)$	for all $t \le t_o$
Then	$y_1(t) = y_2(t)$	for all $t \le t_o$

H.R. POURREZA

11

خصوصیات سیستم ها - علیت (Causality)

- کدام سیستم علّی و کدام غیرعلّی است

$$y(t) = x^2(t-1)$$

- Y(5) وابسته به x(4) است ←-- سیستم علی است

$$y(t) = x(t+1)$$

- Y(5)=x(6)، y وابسته به آینده است ←-- سیستم غیرعلّی است

$$y[n] = x[-n]$$

- Y[5]=x[-5] که مشکلی ندارد، اما y[-5]=x[5]، y وابسته به آینده است ←-- سیستم غیرعلّی است

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

- Y[5] وابسته به x[4] است ←-- سیستم علّی است

H.R. POURREZA

12

خصوصیات سیستم ها - تغییر ناپذیری با زمان (Time-Invariance)

- در یک تعریف عامیانه، یک سیستم تغییرناپذیر با زمان (Time-invariant (TI)) است اگر رفتار سیستم وابسته به این نباشد که الان چه زمانی است
- از نظر ریاضی (برای یک سیستم DT): یک سیستم $x[n] \rightarrow y[n]$ یک سیستم TI است اگر برای هر ورودی x[n] و هر شیفت زمانی n_0،

$$\text{If} \qquad x[n] \rightarrow y[n]$$
$$\text{then} \qquad x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0] \; .$$

- بطور مشابه برای یک سیستم CT و تغییرناپذیر با زمان

$$\text{If} \qquad x(t) \rightarrow y(t)$$
$$\text{then} \qquad x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0).$$

13

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - تغییر ناپذیری با زمان (Time-Invariance)

- کدام سیستم تغییرناپذیر با زمان و کدام تغییرپذیر با زمان است؟

$$y(t) = x^2(t+1)$$

TI

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

Time-varying (NOT time-invariant)

14

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - تغییر ناپذیری با زمان (Time-Invariance)

- کدام سیستم تغییرناپذیر با زمان و کدام تغییرپذیر با زمان است؟

$$y(t) = x(3t)$$

برای اثبات، برای یک ورودی خاص و شیفت‌یافته آن خروجی را رسم کنید

Time-varying (NOT time-invariant)

H.R. POURREZA

15

خصوصیات سیستم ها - تغییر ناپذیری با زمان (Time-Invariance)

- آنچه که استنباط می‌شود
  - اگر ورودی به یک سیستم TI پریودیک باشد، خروجی نیز پریودیک و با همان پریود خواهد بود
  - اثبات

فرض کنید: $x(t + T) = x(t)$

و $y(t) \rightarrow x(t)$

تغییرناپذیری با زمان ایجاب می‌کند

$$x(t + T) \rightarrow y(t + T).$$

These are the same input!

So these must be the same output,

i.e., $y(t) = y(t + T)$.

H.R. POURREZA

16

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)

- خیلی از سیستم‌ها غیرخطی هستند. برای مثال: خیلی از المان‌های الکتریکی (مثل دیود)، دینامیک هواپیما، مدل‌های اقتصادی و …
- با این وجود تمرکز ما بر روی سیستم‌های خطی است
- چرا؟
  - مدل‌های خطی بیان دقیقی از رفتار خیلی از سیستم‌ها ارایه می‌کنند (مثل مقاومت‌ها و خازن‌های خطی)
  - مدل‌ها می‌توانند در حالت سیگنال کوچک و در اطراف نقطه‌ی کار خطی شوند
  - آنالیز سیستم‌های خطی آسان بوده و ابزار قدرتمندی را در اختیار ما قرار می‌دهند

17 H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و غیرخطی (Linear and Nonlinear)

- خطی بودن
- یک سیستم (CT) خطی است اگر دارای خاصیت جمع آثار (Superposition) باشد:
- اگر $x_1(t) \to y_1(t)$ and $x_2(t) \to y_2(t)$
- آنگاه $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$
- چند مثال
- $y[n] = x^2[n]$ Nonlinear, TI, Causal
- $y(t) = x(2t)$ Linear, <u>not</u> TI, Noncausal
- آیا می‌توانید سیستم‌هایی با ترکیبات دیگر مثال بزنید؟
- مثلا: y[n]=x[n+1] Linear, TI, Noncausal
- یا y[n]=nx[n] Linear, not TI, Causal

18 H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و غیرخطی
(Linear and Nonlinear)

- خواص سیستم‌های خطی
  - جمع آثار

$$\text{If} \qquad x_k[n] \;\rightarrow\; y_k[n]$$

$$\text{Then} \qquad \sum_k a_k x_k[n] \;\rightarrow\; \sum_k a_k y_k[n]$$

- برای سیستم‌های خطی، ورودی صفر ← خروجی صفر
- اثبات:

$$\text{"Proof"} \qquad 0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0$$

19

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و غیرخطی
(Linear and Nonlinear)

- ادامه خواص سیستم‌های خطی
  - یک سیستم خطی علّی است اگر و فقط اگر خاصیت initial rest را برآورده کند:
  - اثبات

$$x(t) = 0 \text{ for } t \le t_0 \rightarrow y(t) = 0 \text{ for } t \le t_0 \;\; (*).$$

- 1- فرض کنید سیستم علّی است. نشان دهید که (*) برقرار است
- 2- فرض کنید که (*) برقرار است. نشان دهید که سیستم علّی است.

20

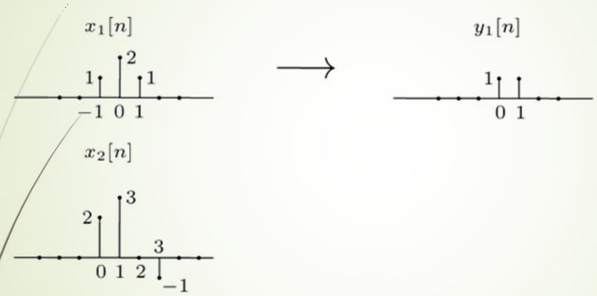
H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

- سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر بازمان (LTI)
  - تمرکز بخش اعظم این درس
    - اهمیت کاربردی
    - وجود ابزار قوی برای سیستم‌های LTI
- یک واقعیت پایه‌ای: اگر پاسخ یک سیستم LTI به برخی ورودی‌ها را بدانیم، پاسخ سیستم به خیلی از ورودی‌های دیگر برایمان معلوم خواهد بود

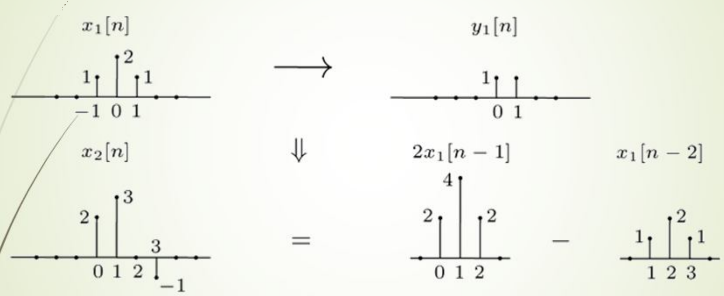
خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

- مثال: یک سیستم DT و LTI



خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

- مثال: یک سیستم DT و LTI

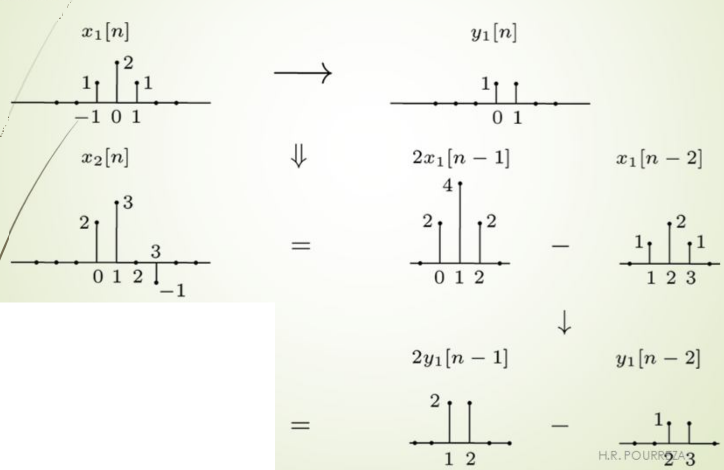


23

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

- مثال: یک سیستم DT و LTI

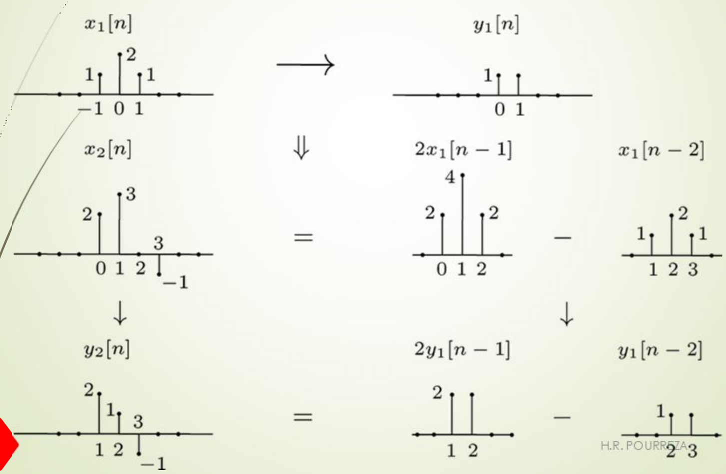


24

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها -سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان

- مثال: یک سیستم DT و LTI



خصوصیات سیستم ها - حافظه دار بودن

- سیستمی بدون حافظه است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته باشد (نه به گذشته و نه به آیند مرتبط نباشد)
- مثال:
  - سیستم بدون حافظه $y[n]=x^2[n]$ $\qquad y(t)=x^2(t)$
  - سیستم با حافظه $y[n]=x[n-1]$ $\qquad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x^2(t')dt'$

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

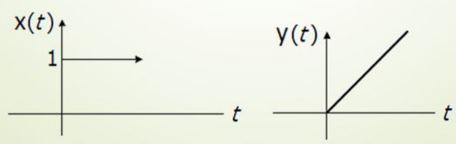
- سیستم بدون حافظه حتماً علی است

خصوصیات سیستم ها - پایداری

- سیستمی پایدار است که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود داشته باشد.
- سیستم پایدار BIBO:

$$\forall n: |x[n]| < T_1 \quad \Rightarrow \quad |y[n]| < T_2$$

- سیستمی پایدار است که با ورودی‌های کوچک، خروجی واگرا ایجاد نکند
- مثال: سیستم ناپایدار $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$

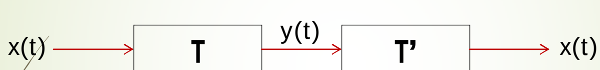


27

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - معکوس پذیری

- سیستمی معکوس‌پذیر است که ورودی‌های مختلف، خروجی‌های مختلف ایجاد کند. یا از روی خروجی بشود ورودی را تعیین کرد.



28

H.R. POURREZA

خصوصیات سیستم ها - معکوس پذیری

- مثال:

معکوس پذیر

$y(t) = x(t) - 3$

$y(t) = x(3t)$

معکوس‌ناپذیر

$y(t) = |x(t)| - 3$

$y(t) = 5$

$y(t) = x(t).\sin(-t)$ زمانهایی که سینوس صفر است، خروجی به ورودی وابسته نیست

$y[n] = x[2n]$ برخی نمونه‌ها گم می‌شوند

H.R. POURREZA

29