MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

سیگنال ها و سیستم ها

درس سوم

حمیدرضا پوررضا

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

موضوعات این جلسه

- بیان سیگنال‌های DT بر حسب نمونه‌های واحد شیفت‌یافته
- بیان کانولوشن برای سیستم‌های DT و LTI
- چند مثال
- پاسخ پله واحد و خصوصیات سیستم‌های DT و LTI

H.R. POURREZA

2

بهره گیری از جمع آثار و تغییر ناپذیری با زمان

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{LinearSystem} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

- سوال: آیا مجموعه‌ای از سیگنال‌های پایه وجود دارد که:
  - مجموعه‌ی بزرگی از سیگنال‌ها بتواند با ترکیبی از این سیگنال‌های پایه بیان شود
  - پاسخ سیستم‌های LTI (CT یا DT) به این سیگنال‌های پایه ساده و روشن باشد

- برای سیستم‌های LTI (CT یا DT) دو انتخاب طبیعی وجود دارد

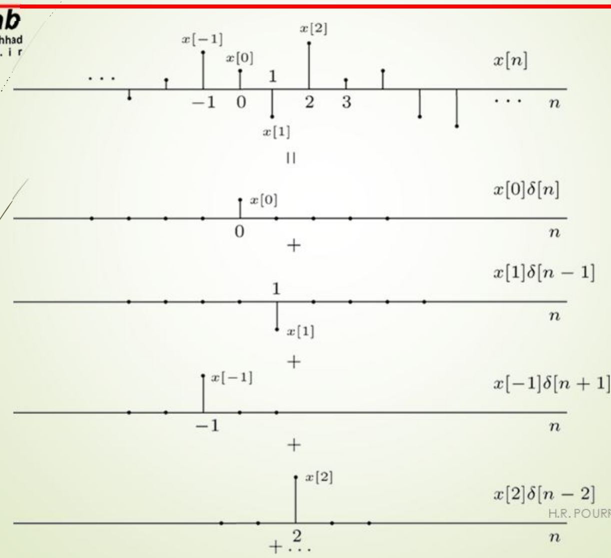
برای DT نمونه‌های واحد (Unit Sample) شیفت‌یافته

برای CT ایمپالس‌های واحد (Unit Impulse) شیفت‌یافته

3

H.R. POURREZA

بیان یک سیگنال گسسته در زمان با استفاده از نمونه های واحد



4

H.R. POURREZA

بیان یک سیگنال گسسته در زمان با استفاده از نمونه های واحد

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
m v l a b . u m . a c . i r

- بدین ترتیب

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \, \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}$$

- خاصیت غربالی (sifting) تابع نمونه‌ی واحد

H.R. POURREZA

بیان یک سیگنال گسسته در زمان با استفاده از نمونه های واحد

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
m v l a b . u m . a c . i r

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{DT System}} \longrightarrow y[n]$$

- فرض کنید که سیستم خطی است، و پاسخ آن به δ[*n -k*] برابر با $h_k[n]$ است

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

$$\Downarrow$$

- بر اساس جمع آثار

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

H.R. POURREZA

بیان یک سیگنال گسسته در زمان با استفاده از نمونه های واحد

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{DT System}} \longrightarrow y[n]$$

- حال فرض کنید که سیستم LTI است، و پاسخ نمونه واحد را $h[n]$ فرض کنید

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

بر اساس تغییرناپذیری با زمان

$$\Downarrow$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

بر اساس خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \underbrace{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{Convolution Sum}}$$

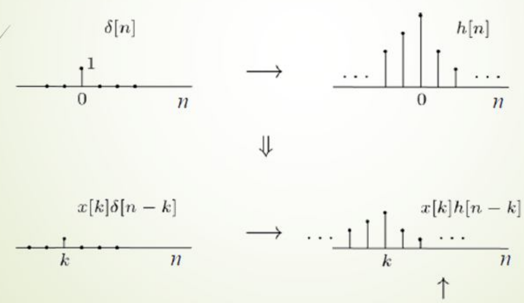
7

H.R. POURREZA

جمع کانولوشن، بیان پاسخ سیستم های LTI

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

تفسیر



Sum up responses over all k

8

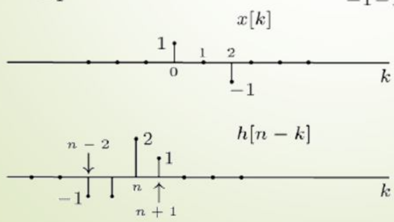
H.R. POURREZA

کانولوشن

- نمایش عملکرد کانولوشن y[n]=x[n]*h[n]
  - برای n مقداری در نظر گرفته، آن را ثابت فرض کنید

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

به عنوان تابعی از k و با مقدار ثابت n

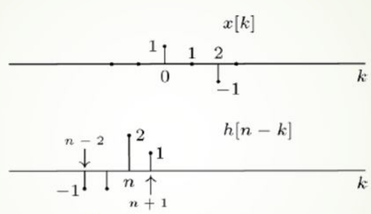


$y[0] = \Sigma$ prod of overlap for $n = 0$

$y[1] = \Sigma$ prod of overlap for $n = 1$

کانولوشن

- محاسبه مقادیر متوالی: شیفت، ضرب و جمع



$$\begin{aligned}
y[n] &= 0 \quad \text{for } n < -1 \\
y[-1] &= 1 \times 1 = 1 \\
y[0] &= 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \\
y[1] &= (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2 \\
y[2] &= (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3 \\
y[3] &= (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1 \\
y[4] &= (-1) \times (-1) = 1 \\
y[n] &= 0 \quad \text{for } n > 4
\end{aligned}$$

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

1- یک سیستم LTI گسسته در زمان می‌تواند کاملا با پاسخ نمونه واحد آن مشخص شود

مثال 1: $h[n]=\delta[n-n_0]$

$$y[n] = x[n-n_0]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]}$$

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

مثال 2- $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ انباشتگر

پاسخ نمونه واحد

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

-2 خاصیت جابجایی

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

برای اثبات این رابطه، بسادگی می‌توان از یک تغییر متغیر $t=n-k$ در رابطه $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$ استفاده کرد.

در این صورت رابطه $y[n]=\sum_{t=-\infty}^{\infty}x[n-t]h[t]$ و یا رابطه‌ی $y[n]=\sum_{t=-\infty}^{\infty}h[t]x[n-t]$ بدست خواهد آمد که معادل است با $y[n]=h[n]*x[n]$

13

H.R. POURREZA

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

-2 خاصیت جابجایی (ادامه)

مثال 1: ارتباط پاسخ پله (s[n]) و پاسخ نمونه واحد (h[n])

$$s[n]=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{step}\\ \text{input}}}{u[n]}*h[n]=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{“input”}}}{h[n]}*\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Unit Sample response}\\ \text{of accumulator}}}{u[n]}$$

$$\Downarrow$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

14

H.R. POURREZA

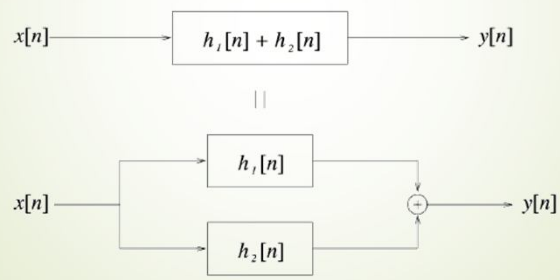
خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

3- خاصیت توزیع‌پذیری

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+ x[n]*h_2[n]$$

تفسیر



H.R. POURREZA

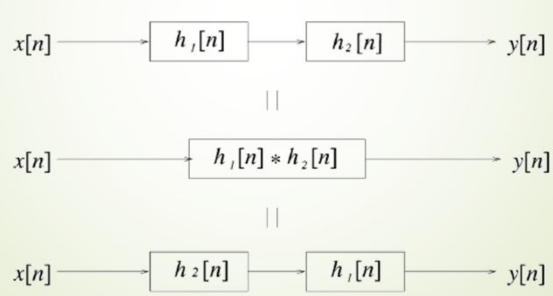
خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

4- خاصیت شرکت‌پذیری

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

مفهوم (خاص سیستم‌های LTI)



H.R. POURREZA

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

- بدون‌حافظه بودن) با توجه به رابطه بالا، سیستم بدون حافظه است اگر و تنها اگر:

$$h[n]=0\quad \forall n\neq 0\quad \Rightarrow\quad y[n]=k.x[n]$$

- معکوس‌پذیری) سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\exists h'[n]\;\big|\;\; h[n]*h'[n]=\delta[n]$$

17

H.R. POURREZA

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

- علیت) سیستم علی است اگر و تنها اگر:

$$h[n]=0\quad \forall n<0\qquad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

- همانطور که مشاهده می‌شود خروجی تنها به گذشته ورودی ربط دارد

18

H.R. POURREZA

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

- پایداری) سیستم پایدار است اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$$

- به خاطر بیاورید: شرط BIBO $\forall n:\ |x[n]|<T_1 \quad \Rightarrow \quad |y[n]|<T_2$
- اثبات: 1) اگر رابطه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\alpha<\infty$ برقرار باشد سیستم پایدار است

فرض کنید $|x[n]|<T_1$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\le T_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=T_1.\alpha$$

19

H.R. POURREZA

خصوصیات کانولوشن و سیستم های LTI گسسته در زمان

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

- پایداری) ادامه
- اثبات:2) اگر سیستم پایدار باشد آنگاه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$

عکس نقیض را اثبات می‌کنیم.

پس اگر $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\infty$ باشد سیستم ناپایدار است

برای سیستم مفروض با پاسخ نمونه واحد $h[n]$ ورودی محدود زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n]=\begin{cases}0 & if\ \ h[-n]=0\\ \dfrac{|h[-n]|}{h[-n]} & if\ h[-n]\neq 0\end{cases}$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[0-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\frac{|h[k]|}{h[k]}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\infty$$

ورودی محدود، خروجی نامحدود: ناپایدار

20

H.R. POURREZA