سیگنال ها و سیستم ها

درس چهارم

حمیدرضا پوررضا

موضوعات این جلسه

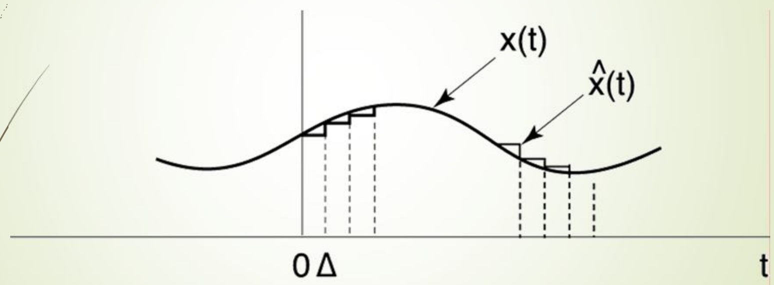
- بیان سیگنال‌های CT بر حسب توابع ضربه واحد شیفت‌یافته
- بیان انتگرال کانولوشن برای سیستم‌های CT و LTI
- خاصیت‌ها و چند مثال
- تابع ضربه واحد به عنوان پالس ایده‌آل کوتاه. تعریف عملیاتی $\delta(t)$

H.R. POURREZA

2

بیان سیگنال های پیوسته در زمان

- سیگنال ورودی x(t) را می‌توان با مجموع پالس‌های اسکیل شده و شیفت یافته تقریب زد

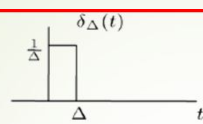


$$\hat{x}(t) = x(k\Delta)\ ,\ k\Delta < t < (k+1)\Delta$$

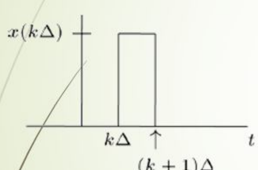
3

H.R. POURREZA

بیان سیگنال های پیوسته در زمان



سطح زیر منحنی $\delta_\Delta(t)$ برابر یک است



$$= \ x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\downarrow \text{ limit as } \Delta \rightarrow 0$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$ خاصیت غربالی تابع ضربه

4

H.R. POURREZA

پاسخ یک سیستم LTI پیوسته در زمان

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT System}} \longrightarrow y(t)$$

$$\delta_\Delta(t) \longrightarrow h_\Delta(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Downarrow$$

پاسخ ضربه $\boxed{\delta(t) \longrightarrow h(t)}$

Taking limits $\Delta \to 0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

انتگرال کانولوشن

H.R. POURREZA

5

عملکرد کانولوشن برای سیگنال های پیوسته در زمان

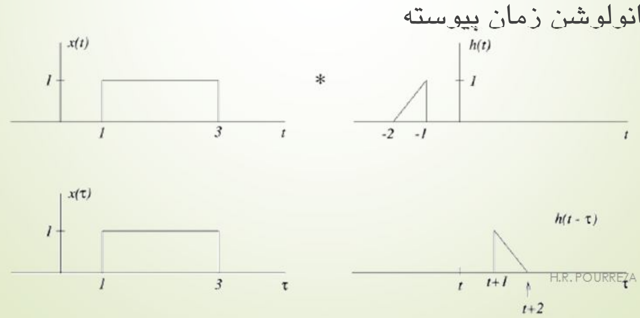
MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

$$y(t) = x(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$h(\tau) \xrightarrow{\text{Flip}} h(-\tau) \xrightarrow{\text{Slide}} h(t-\tau)$$

$$\xrightarrow{\text{Multiply}} x(\tau)h(t-\tau) \xrightarrow{\text{Integrate}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- مثال: کانولوشن زمان پیوسته



H.R. POURREZA

6

عملکرد کانولوشن برای سیگنال های پیوسته در زمان

Time Interval	$x(\tau)\cdot h(t-\tau)$		Output
$t < -1$	0	$\Longrightarrow$	$y(t) = 0$
$-1 < t < 0$	$t+1$; 1, $t+2$	$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2}(t+2)(t+2-1) = \frac{1}{2}(t+1)^2$
$0 < t < 1$	1; $t+1$, $t+2$	$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$
$1 < t < 2$	1; $t+1$, 3, $t+2$	$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t+2-3)(t-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2$
$t > 2$	0	$\Longrightarrow$	$y(t) = 0$

$y(t)$

t

H.R. POURREZA

7

خصوصیات و مثال ها

1- جابجایی پذیری

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

2- خاصیت غربالی

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad \text{Sifting property: } x(t) * \delta(t) = x(t)$$

H.R. POURREZA

8

خصوصیات و مثال ها

3- مثال: انتگراتور

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$\Downarrow$$

اگر ورودی $x(t)=\delta(t)$ باشد، در این صورت $y(t)=h(t)$ خواهد بود

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

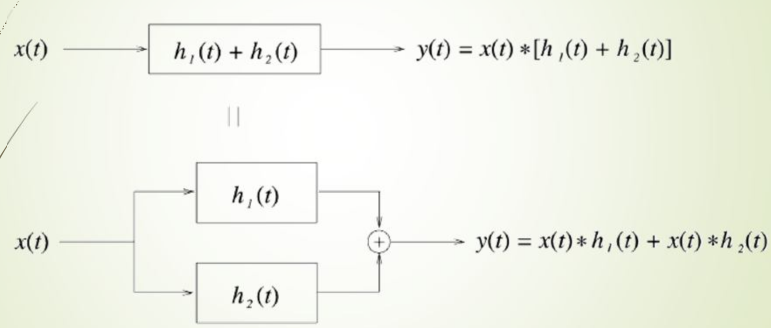
That is

$$y(t) = x(t) * h(t) = \boxed{x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau}$$

4- پاسخ پله

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

خاصیت توزیع پذیری



خاصیت شرکت‌پذیری

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$||$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

$$|| \leftarrow \text{Commutativity}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_2(t) * h_1(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * [h_2(t) * h_1(t)]$$

$$||$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow y(t) = [x(t) * h_2(t)] * h_1(t)$$

11

H.R. POURREZA

خاصیت شرکت‌پذیری

MV Lab
Ferdowsi University of Mashhad
mvlab.um.ac.ir

- آیا شرکت‌پذیری همیشه برقرار است؟
  - مثلا آیا می‌شود دو سیستم متوالی انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر را جابجا کرد؟ خیر. نباید حاصل محاسبه هر کانولوشن به سمت بی‌نهایت برود.
  - آیا می‌شود دو مدار الکترنیکی LTI سری شده با هم را جابجا کرد؟ فقط در صورتیکه اثر بارگذاری برهم نداشته باشند

12

خصوصیات سیستم های LTI پیوسته در زمان

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- بدون‌حافظه بودن) با توجه به رابطه بالا، سیستم بدون حافظه است اگر و تنها اگر:

$$h(t)=0 \quad \forall t\neq 0 \;\Rightarrow\; y(t)=k.x(t)$$

- معکوس‌پذیری) سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\exists h'(t) \mid \; h(t)*h'(t)=\delta(t)$$

- علیت) سیستم علی است اگر و تنها اگر:

$$h(t)=0 \quad \forall t<0$$

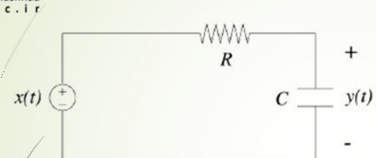
- پایداری) سیستم پایدار است اگر و تنها اگر:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$$

13

H.R. POURREZA

ضربه واحد به عنوان پالس ایده‌آل کوتاه



$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

پاسخ حالت صفر مدار فوق را برای پالس‌های با عرض متفاوت که همگی سطح زیر منحنی یک دارند را در نظر بگیرید. همچنانکه عرض پالس کم می‌شود، پاسخ برای پالس‌های مختلف بیشتر به هم شبیه می‌شوند.

14

H.R. POURREZA

تعاریف عملیاتی ایمپالس واحد δ(t)

- δ(t): در حالت ایده‌آل ایمپالس با سطح واحد آنقدر کوتاه است که برای سیستم‌های فیزیکی مورد علاقه ما، سیستم فقط به سطح پالس پاسخ می‌دهد و به عرض پالس حساس نیست.
- در حالت عملیاتی: ایمپالس واحد، سیگنالی است که وقتی به یک سیستم LTI اعمال می‌شود، پاسخ آن پاسخ ضربه واحد است

$$\delta(t) * h(t) = h(t) \qquad \text{for all } h(t)$$

15

H.R. POURREZA

دوبلت واحد – مشتق‌گیر

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

پاسخ ضربه = دوبلت واحد

$$u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

تعریف عملیاتی دوبلت واحد

$$x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

16

H.R. POURREZA

تریپلت و ...

$n > 0$

$$u_n(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{\text{n times}}$$

n is number of differentiations

تعریف عملیاتی

$$x(t) * u_n(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (n > 0)$$

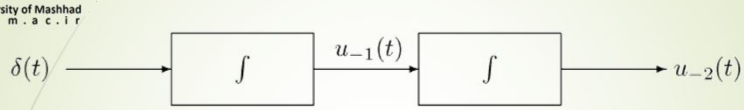
انتگراتورها

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

- پاسخ ضربه: $u_{-1}(t)$ (مشتق منهای یکم=انتگرال) ← پاسخ ضربه=پله واحد
- تعریف عملیاتی: $x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- اتصال آبشاری (cascade) n انتگراتور

$$u_{-n}(t) = \underbrace{u_{-1}(t) * \cdots * u_{-1}(t)}_{\text{n times}} \quad (n > 0)$$

انتگراتورها (ادامه)



$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$
$$= t \cdot u(t) \quad \text{شیب واحد}$$

در حالت عمومی و برای n>0

$$u_{-n}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$

H.R. POURREZA

19

نشان‌گذاری

- تعریف می‌کنیم $u_0(t) = \delta(t)$

آنگاه

$$u_n(t) * u_m(t) = u_{n+m}(t)$$

n and m can be $\pm$.

به عنوان مثال

$$u_1(t) * u_{-1}(t) = u_0(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) = \delta(t)$$

H.R. POURREZA

20

حقه‌ای که می‌تواند گاهی مفید باشد

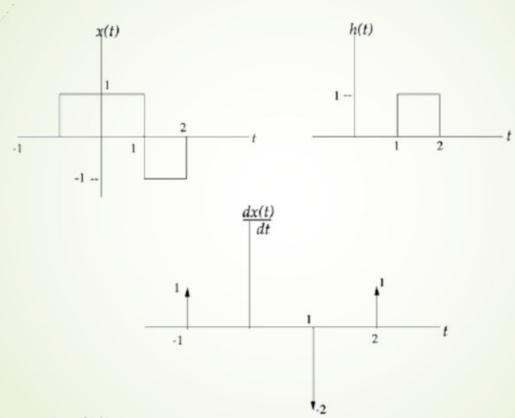
$$
\begin{aligned}
x(t) * h(t) &= x(t) * \delta(t) * h(t) \\
&= x(t) * u_1(t) * u_{-1}(t) * h(t) \\
&= \{[x(t) * u_1(t)] * h(t)\} * u_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

اول مشتق، سپس کانولوشن و نهایتا انتگرال

21

H.R. POURREZA

مثال



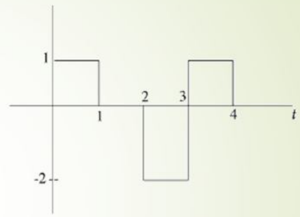
$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t+1) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

22

H.R. POURREZA

مثال (ادامه)

$$\frac{dx(t)}{dt} * h(t) = h(t+1) - 2h(t-1) + h(t-2)$$



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\frac{dx(\tau)}{d\tau} * h(\tau) \right] d\tau$$